

Speciális kontinuummodellek az alkalmazott elektrodinamikában

MTA doktori értekezés

Gyimóthy Szabolcs

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék
Budapest, 2020.

Tartalomjegyzék

Rövidítések	v
Szimbólumok	vii
Előszó és köszönetnyilvánítás	1
1. Bevezető	3
1.1. Direkt és inverz problémák	3
1.2. Matematikai modell, szimuláció	4
1.3. Többléptékű problémák, dekompozíció	6
1.4. Kontinuummodellek, homogenizáció	6
1.5. A dolgozat célkitűzése	8
2. Litze huzalból készült WPT tekercsek	9
2.1. Litze huzal a vezeték nélküli energiaátvitelben	9
2.2. A veszteség elvi számítása	11
2.3. A huzal geometriája	12
2.4. Örvényáram-jelenségek a huzalban	15
2.5. Többléptékű, hierarchikus modell a veszteség számítására	19
2.5.1. Nagy léptékű modell: a tekercs és környezete	20
2.5.2. Közepes léptékű modell: a kötegstruktúra	22
2.5.3. Kis léptékű modell: az elemi vezetősál	28
2.6. A kötegközi áramkiszorítás homogenizált modellje	31
2.6.1. Az árammegoszlás számítása	31
2.6.2. Aszimptotikus viselkedés	35
2.7. Ortogonalitás, a veszteség összetevőkre bontása	38
2.8. Egy VA-Z1 típusú WPT tekercsmodul vizsgálata	41
2.8.1. A nagy léptékű FEM modell eredményei	43
2.8.2. A közepes léptékű BLSE modell kiértékelése	45
2.8.3. A veszteségek összegzése és ellenőrzése méréssel	47
3. Homogenizált szalagtekercs-modell	51
3.1. A meglévő módszerek áttekintése	52
3.1.1. Tér- és potenciálformalizmusok	53
3.1.2. Geometria és diszkretizálás	55
3.1.3. Globális kényszerek	56
3.2. Célkitűzés	60
3.3. Ekvivalens vezetőképesség-tenzor	61
3.3.1. Hengerszimmetrikus homogenizálás	61
3.3.2. Spirál menti homogenizálás	63

3.4.	Kvázi-stacionárius ($A-V, A$) módszer	64
3.4.1.	PDE és peremfeltételek	64
3.4.2.	Hálózati egyenletek és gerjesztés	66
3.4.3.	Végeselemes implementáció	67
3.5.	Lineáris, stacionárius tesztfeladatok	67
3.5.1.	A részletes és a homogenizált modell összevetése	68
3.5.2.	A módszer pontossága és korlátai	70
3.6.	Szupravezető szalagtekercs szimulációja	74
3.6.1.	HTS tekercsek szimulációs alapfeladatai	76
3.6.2.	Bekapcsolási tranziens, és kritikus állapot	76
4.	Mozgó közeg nyugvó-ekvivalens modellje	79
4.1.	Bevezető és célkitűzés	79
4.2.	Elektrodinamikai törvények transzformációja	80
4.2.1.	Maxwell-egyenletek vákuumban	82
4.2.2.	Maxwell-egyenletek közegben, konstitúciós egyenletek	82
4.2.3.	Közeghatár-egyenletek	84
4.3.	Peremérték-problémák nyugalmi ekvivalense	85
4.3.1.	A PDE konvekciós-diffúziós átalakítása	86
4.3.2.	Folytonossági feltételek és a PDE gyenge alakja	87
4.3.3.	Speciális mozgások: transláció és forgás	89
4.4.	Tesztfeladatok	90
4.4.1.	Csúszó érintkezők	90
4.4.2.	Radarszórás forgó szigetelőhengeren	93
	Az eredmények tézisszerű összefoglalása	99

Rövidítések

1D, 2D, 3D	egydimenziós, kétdimenziós, háromdimenziós
AC	váltakozó áramú
avg	average (átlagos)
BL, bl	Bundle-Level (a köteg szintjén)
BLPE, blpe	Bundle-Level Proximity Effect (kötegszintű közelségi hatás)
BLSE, blse	Bundle-Level Skin Effect (kötegszintű áramkiszorítás)
BME	Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
CSM	critical state model (kritikus állapot modell)
DC	egyenáramú
DoF	Degrees of Freedom (szabadsági fokok száma)
EMC	elektromágneses kompatibilitás
ext	external (külső)
FEC	Furukawa Electric Co., Ltd.
FEM	Finite Element Method (végelem-módszer)
FETD	Finite Element Time Domain (időbeli végelem-módszer)
FETI	Furukawa Electric Technológiai Intézet Kft.
FoM	Figure of Merit (jósági szám)
HTS	High Temperature Superconductor (magas hőmérsékletű szupravezető)
HVT	Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszék
IE	Integral Equations (integrálegyenletek)
int	internal (belső)
LCX	Leaky Coaxial cable (részlegesen árnyékolt kábel)
MQS	Magneto Quasi-Static (magneto-kvázistacionárius)
NZPV	Normal Zone Propagation Velocity (a normál vezető tartomány terjedési sebessége)
PDE	parciális differenciálegyenlet
PE, pe	Proximity Effect (közelségi hatás)
PEEC	Partial Element Equivalent Circuit
SE, se	Skin Effect (áramkiszorítás, szkineffektus)
SI	Système International d'Unités (Nemzetközi Mértékegységrendszer)
SL, sl	Strand-Level (az elemi szál szintjén)
SLPE, slpe	Strand-Level Proximity Effect (szálszintű közelségi hatás)
SLSE, slse	Strand-Level Skin Effect (szálszintű áramkiszorítás)
WPT	Wireless Power Transfer (vezeték nélküli energiaátvitel)
YBCO	Yttrium barium copper oxide (ittrium-bárium-réz-oxid)

Szimbólumok

A, a	mágneses vektorpotenciál, abszorpciós együttható (PDE)
α	rövidülési faktor
B, b	mágneses indukció, konvekciós együttható (PDE)
c, c_0, dc	diffúziós együttható (PDE), fénysebesség vákuumban, vonalelemvektor
$C; C^k$	kapacitás, vonal (görbe); folytonossági osztály (függvénytér)
D	elektromos eltolás
δ	behatolási mélység
E	elektromos térerősség
ε	permittivitás, ellipticitási szög
η	hatásfok
f	frekvencia, forrás (PDE)
ϕ	jósági szám (figure of merit)
G_{se}, G_{pe}	áramkiszorítás, illetve közelségi hatás tényezője
H, H^k	mágneses térerősség, Sobolev-tér
I, I	áramerősség, egységtenzor
$J, j, J; \mathcal{J}_n$	áramsűrűség, képzetes egység, forgatótenzor; elsőfajú, n -ed rendű Bessel-függvény
K, K, k	felületi áramsűrűség, koordináta-rendszer, hullámszám
L	induktivitás
M, M, M	mágnesezettség, kölcsönös induktivitás, diffúziós tenzor (PDE)
μ	mágneses permeabilitás
ν	reluktivitás (fajlagos mágneses vezetőképesség), frekvencia
ω	körfrekvencia
Ω	térrész, modelltartomány, szögsebesség
P, P	polarizáció, hatásos teljesítmény
Ψ	mágneses fluxus
R, \mathbb{R}	ellenállás, a valós számok halmaza
ρ	fajlagos elektromos ellenállás, töltéssűrűség
$S; ds$	szórási paraméter, felület; felületelem-vektor
σ	fajlagos elektromos vezetőképesség
ς	relatív szórás
t	idő
T, T	áram-vektorpotenciál, abszolút hőmérséklet
$V, d\nu, \nu$	térfogat (térrész), térfogatelem, sebesség
w	valószínűségi sűrűségfüggvény
χ	kitöltési tényező, elektromos szuszceptibilitás

Előszó és köszönetnyilvánítás

Kutatási területem az elektromágneses mezők numerikus szimulációja, valamint olyan mérnöki problémák, amelyekben az kiemelt fontosságú. E klasszikusnak számító tudományterületen manapság nem könnyű látványos sikert elérni, pedig kutatnivaló akad bőven. Az utóbbi időben számos olyan alkalmazás került előtérbe, amely a szimuláció szempontjából kihívást jelent: ilyen a vezeték nélküli energiaátvitel, a különböző elektromágneses képalkotási eljárások, a meta-anyag tervezés, vagy a fúziós reaktor, hogy csak néhány példát említsek.

2014-ben habilitáltam a BME Villamosmérnöki és Informatikai Karán, ahol három tézist foglalmaztam meg az említett tématerületen [42]. Kézenfekvő lett volna azok továbbfejlesztése az akadémiai doktori címhez, én mégis jobbnak láttam a disszertációt elsősorban az *azóta* született kutatási eredményekre alapozni, részint a témák újszerűsége, részint azok nagyobb koherenciája miatt. Ebből kifolyólag a téziseimet némileg kisebb számú, de *frissebb* publikációval tudom alátámasztani.

* * *

Kutatómunkám szervesen kapcsolódik a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (BME) oktatott tantárgyaimhoz: pl. *Elektromágneses terek alapjai*, *Mezőszimuláció végeselem módszerrel*, *Relativisztikus elektrodinamika mérnököknek*, *Vezeték nélküli energiaátvitel*. A kutatás ugyanis színesíti, előbbre teszi az oktatást, míg az utóbbi segíti a mélyebb megértést és inspirációt ad a kutatáshoz.

Valaha még a *villamosságtan* diszciplínája jelentette a villamosmérnök-képzés alfáját, amely lényegében az elektrodinamika *mérnöki* megközelítését és gyakorlati alkalmazását foglalta magában. Manapság ezzel legalábbis összemérhető jelentőségű a *jel- és rendszerelmélet*, a *digitális technika* és az *informatika*, de a közeljövőben várhatóan a *kvantumelmélet* ismerete is hasonló fontosságra tehet szert a villamosmérnökök körében. A villamosságtan-oktatás emiatt valamelyest veszített a súlyából, és jobbára csak az alapfogalmakra és összefüggésekre kénytelen szorítkozni.

Másfelől viszont a számítógépek mind intenzívebb használata maga után vonta a korszerű *numerikus térszámító módszerek* oktatásának igényét. Ebben annak idején úttörő szerepet vállalt többek között Dr. Sebestyén Imre, Dr. Iványi Amália, Dr. Bíró Oszkár és Dr. Badics Zsolt, akiket előbb tanárainként, utóbb kollégáinként tisztelhettem. Büszkén arra, hogy ilyen elődök nyomába léphetek, igyekszem mindent megtenni, hogy az elméleti villamosságtan és a numerikus térszámítás oktatása méltó módon folytatódjék az egyetemen.

A dolgozat egy rövid, általános bevezető után három, nem egymásra épülő, azaz önállóan is olvasható fejezetre tagolódik; ezekhez külön bevezető tartozik a szakirodalmi háttér részletes ismertetésével; az irodalomjegyzék a dolgozat végén található. A gördülékenyebb olvasást és értelmezést a rövidítések és szimbólumok jegyzéke segíti. A kutatást többnyire hazai és külföldi kollégáimmal közösen végeztük; ezen belül a saját eredményeimet *tézisekben* foglalom össze. A különbségtételt a dolgozat nyelvhasználata is tükrözi: a fejezeteket többes szám első személyben, míg a téziseket egyes szám első személyben fogalmaztam meg.

Ahol csak lehet, a magyar szakszóhasználatot követem, de egyes esetekben elkerülhetetlen az angol kifejezések használata. Magyar specialitás, hogy az elektromágneses *mezőre* gyakran a *tér* szót is használjuk; e kettősség végigkíséri a dolgozatot, ám remélhetőleg nem okoz félreértést. A szaknyelvi hagyomány itt-ott a különírás-egybeírás szabályait is felülírja (pl. végeselem módszer, végeselem-modell, végeselemkód).

* * *

Ezúton fejezem ki köszönetemet mindennek előtt Dr. Pávó Józsefnek és Dr. Bilicz Sándornak, kollégáimnak a BME Szélessávú Hírközlés és Villamosságtan Tanszékén, akik nélkül e munka nem jöhetett volna létre. Nem csupán a közös munkáért vagyok hálás, de barátságukért és önzetlen támogatásukért is. Köszönöm nekik a dolgozat gondos átnézését és hasznos tanácsait.

Köszönet illeti mindazon kollégáimat, akikkel együtt kutathattam és publikálhattam az elmúlt években, azaz (a teljesség igénye nélkül) Dr. Badics Zsoltot, Bingler Arnoldot, Dr. Bíró Oskárt, Dr. Horváth Pétert, Kenderes Anettet, Kiss Imrét, Marák Károlyt, Szűcs Lászlót és Dr. Vértessy Gábort. Kenderes Anettnek külön köszönettel tartozom a szupravezető szalagtekercsrel kapcsolatos számításaiért. Több kollégám közvetve – a jó munkahelyi légkör megteremtésével és erkölcsi támogatásával – járult hozzá a disszertáció létrejöttéhez; közülük ki kell emelnem Dr. Bitó Jánost, Dr. Bokor Árpádot, Dr. Horváth Bálintot és Reichardt Andrást.

Hálás vagyok a Furukawa Electric Technológiai Intézet (FETI) Kft.-vel immár 25 évre visszatekintő, gyümölcsöző együttműködésért. Nem csupán visszajelzést kaptam általa a „gyakorlati élettől”, de sok esetben magát a kutatási témát is ebből az ipari kapcsolatból merítettem. Köszönöm Dr. Besztercey Gyula igazgató és Dr. Varga Gábor fizikus, a szimulációs csoport vezetője irántam való töretlen bizalmát, valamint Dr. Pálfalvi Attila szakmai segítségét.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm feleségem Erika, édesanyám és édesapám, gyermekeim, valamint tágabb családom és barátaim kitartását, türelmét és támogatását a kutatással töltött évek alatt.

1. fejezet

Bevezető

1.1. Direkt és inverz problémák

Az elektromágneses elven működő eszközök tervezése során a mérnök olyan geometriai elrendezést és forráseloszlást keres, amely létrehozza a kívánt tulajdonságú elektromágneses mezőt. Azonban ebben a megközelítésben az elektromágneses terek fizikai elmélete *közvetlenül* nem alkalmazható. Ugyanis a szóban forgó feladatkitűzés matematikai értelemben véve *inverz probléma*, amelynek megoldása gyakran nem egyértelmű, számítása pedig általában nehéz. Egyébként nem csak az eszköztervezés, de számos elektromágneses képalkotó módszer (pl. impedanciatomográfia, örvényáramú anyagvizsgálat) is hasonló inverz problémára vezet.

Ezzel szemben a térelmélet eredeti célkitűzése az ún. *direkt probléma*, amelyben adva van a konstrukció geometriája, az anyagjellemzők, valamint a gerjesztés, és azok ismeretében kell meghatározni az elektromágneses teret. E feladat determinisztikus modellje a klasszikus fizikában régóta jól ismert, matematikai megoldása pedig bizonyíthatóan egyértelmű [62, 98]. Ennek ellenére az elektrodinamika direkt problémája mindmáig tág teret ad a kutatásoknak, melynek okai az alábbi pontokba szedhetők:

- a) A direkt probléma alapját képező Maxwell-egyenletek analitikus megoldása csak nagyon egyszerű elrendezések esetén lehetséges; a gyakorlatban általában numerikus módszerekhez folyamodunk. A numerikus szimuláció manapság látszólag rutinfeladat: mind a megfelelő szoftverekhez, mind a kívánt hardver-erőforráshoz hozzá lehet jutni. Valójában a numerikus térszámítás – részben éppen az egyre kifinomultabb eszközök miatt – bizonyos szakértelmet igényel; egy szakma, amelynek megvannak a maga „fortélyai”.¹ Ráadásul rendre felmerülnek olyan feladatok, amelyeket még szakavatott használat mellett sem lehet az aktuálisan rendelkezésre álló célszoftverrel és erőforrással hatékonyan megoldani, emiatt új algoritmusok [67], esetleg új elmélet kidolgozását teszik szükségessé.
- b) Az inverz probléma megoldását általában direkt problémák egész sorának analízise kíséri, akár valamilyen optimalizációs eljárás keretében [13], akár egy a direkt megoldásokból

¹ A szoftvergyártók azt sugallják, hogy programjukkal szinte bárki képes megoldani a szimulációs feladatokat (ha mégsem, akkor a terméktámogatás keretében egy arra hivatott szakértői csoport segít benne).

előzőleg felépített adatbázisban való kereséssel [1, 12, 82]. Emiatt nem mellékes kérdés a több százszor vagy ézerszer megoldandó direkt probléma hatékonysága, azaz futásideje és memóriaigénye.

- c) A direkt probléma esetében az ismert fizikai törvényekből kiindulva egy hatékonyan megoldható matematikai feladatot konstruálunk; ezt hívjuk mérnöki *modellalkotásnak*. A direkt modell megválasztása ugyanakkor alapvetően befolyásolja a rá épülő inverz probléma meghatározottságát (*well-posedness*) [82], paraméterérzékenységét (*sensitivity*) [43], illetve az ún. paraméterbizonytalanság „terjedését” (*uncertainty propagation*) [10].
- d) Az inverz probléma megoldására – annak természetéből fakadóan – jól alkalmazhatóak az ún. „lágy számítási” (*soft computing*) módszerek, amelyeket újabban „gépi tanulásnak” (*machine learning*) is neveznek. Ebben kulcsfontosságú kérdés, hogy az algoritmust milyen minőségű adathalmazzal tanítják be [50, 51], amelynek előállítása viszont a direkt probléma mélyebb ismeretét igényli.
- e) Manapság egyre gyakrabban jelennek meg olyan munkák, amelyekben a gépi tanulást a direkt probléma megoldására is alkalmazzák [35, 72]. Ennek mozgatója, hogy a többnyire neurális hálózatra alapozott „viselkedési modell” predikciója nagyságrendekkel gyorsabban előállítható, mint egy klasszikus térszámítási modell kimenete, ugyanakkor – legalábbis a tervezés bizonyos szakaszaiban – elegendő pontosságú. A direkt probléma fizikai alapú modelljének azonban továbbra is vannak – és talán mindig is lesznek – vitathatatlan előnyei a gépi tanulással szemben. Az utóbbi által leszűrt „tudást” ugyanis többé-kevésbé elrejtí az algoritmus, és ha ki is nyerhető, az értelmezhetősége kérdéses. Ezzel szemben a jól konstruált fizikai modell – és itt nem csupán az alapvető törvényekre, de a terület- és eszközspecifikus modellekre is gondolunk – a működés leglényegére (esszenciájára) világít rá, továbbá kikristályosodott, tömör és hordozható (portábilis) tudást képvisel.

1.2. Matematikai modell, szimuláció

Az elektrodinamika alapját a Maxwell-egyenletek képezik. A villamosmérnöki gyakorlatban leggyakrabban az ún. *makroszkopikus, differenciális* alakját használjuk [98]:

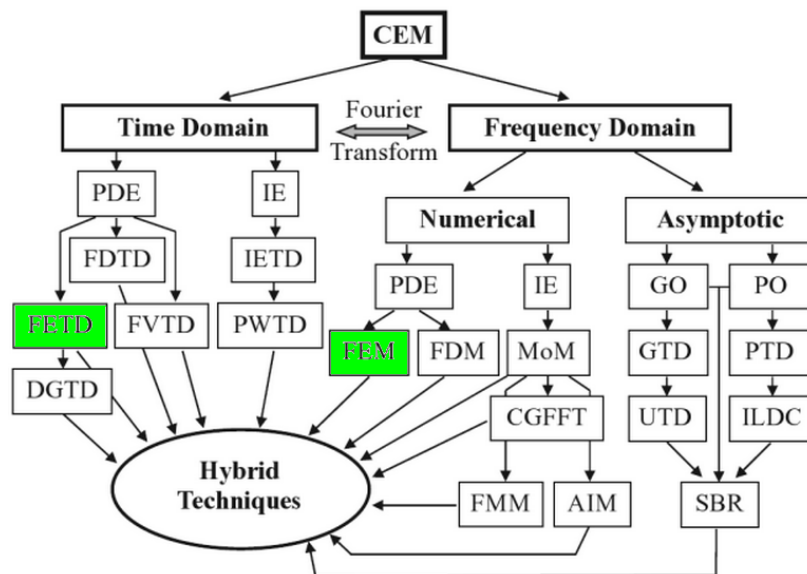
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

Az egyenletekben \mathbf{E} az elektromos térerősség, \mathbf{B} a mágneses indukció, \mathbf{H} a mágneses térerősség, \mathbf{D} az elektromos eltolás, \mathbf{J} az áramsűrűség vektora, ρ pedig a töltéssűrűség. A fent említett direkt



1.1. ábra. A véges elem módszer helye az elektrodinamika numerikus módszereinek családfájában (forrás [65]; színes kiemelés Gy.Sz.; FETD feloldása: *finite element time domain*).

probléma egyértelmű megoldásához e négy alapegyenleten túl szükségesegek még

- a konstitúciós egyenletek (más néven közeg- vagy anyagegyenletek),
- a nem elektromágneses eredetű gerjesztést képviselő beiktatott mezők,
- közegethatárokon a folytonossági feltételek,
- időtartománybeli analízis esetén a kezdeti feltételek,
- zárt tartomány esetén a peremfeltételek,
- nyílt tartomány esetén pedig bizonyos energetikai megfontolások.

A direkt probléma numerikus megoldására avagy *szimulációjára* számos módszer létezik, amelyek „családfája” az 1.1. ábrán látható. Bár ez jól mutatja a módszerek sokszínűségét, nem súlyozza azokat alkalmazhatóságuk és elterjedtségük szerint. Míg ugyanis egyes módszerek csak bizonyos szakterületen, illetve adott problémátípusra használhatók, addig mások a problémák szinte teljes körére. Az utóbbiak egyike a véges elem módszer (*finite element method*, FEM), amelyet mára a fizika szinte minden területén sikerrel alkalmaznak [26, 64].

A véges elem módszerrel általában a Maxwell-egyenletek redukálásával nyert parciális differenciálegyenleteket (PDE) oldunk meg. A redukció alapulhat azon, hogy a négy fizikai mező (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D}) közül csupán egyet-kettőt használunk fel, vagy – és ez a gyakoribb – segédmenntényiségeket, ún. *potenciálokat* vezetünk be a fizikai mezők helyett. A redukció előnye nem csak az ismeretlenek számának csökkenésében mutatkozik meg, hanem például a folytonossági feltételek egyszerűbb előírásában, ill. teljesítésében. A PDE-t a hozzá tartozó határ- és peremfeltételek rendszerével együtt *formalizmusnak* nevezzük. A gyakorlatban számos tér-, ill. potenciálformalizmus terjedt el, amelyekről jó összefoglalást nyújt [19] és [70].

1.3. Többléptékű problémák, dekompozíció

Gyakran modellezünk olyan jelenséget, amelynek egésze, illetve térbeli részletessége több nagyságrendnyi mérettartományt fog át; az ilyet többléptékű (angolul *multiscale* vagy *large scale*) problémának nevezzük. Hatékony megoldásuk általában többlépcsős (hierarchikus) térbeli felbontáson (dekompozíción) alapul, vagyis a jelenséget különböző méretskálákön modellezzük, majd az eredményeket valamilyen módon kombináljuk. Így a szimulációs lépések együttes futásideje, valamint memóriaigénye általában sokkal kisebb, mintha az elrendezést egyidejűleg teljes részletességgel modelleznénk.

Ha például egy viszonylag kis méretű objektum okozta *változást* számítjuk az elektromágneses mezőben, akkor jól alkalmazható a *perturbációs* módszer: a mezőt felbontjuk az objektum hiányában jelenlévő ún. beiktatott mező, valamint az általa okozott kis változás (perturbáció) összegére. Első lépésben a nagy léptékű beiktatott összetevőt számítjuk ki, amelynek ismeretében a perturbáció közvetlenül – általában az objektum szűkebb környezetében – számítható. Ezt a módszert eredményesen használják például az elektromágneses elvű, roncsolásmentes anyagvizsgálatban, kisméretű anyaghibák felderítésére [42, 45, 82].

A feladatok egy másik csoportjában az elrendezés finom szerkezetű struktúrát tartalmaz. Ez tovább bontható aszerint, hogy a finomszerkezet véletlenszerű vagy szabályos (pl. periodikus), illetve hogy a modellezés szempontjából fontosak-e az elektromágneses mező struktúráján belüli részletei, avagy csak a statisztikai (átlagolt) jellemzői érdekesek. Ilyenkor az általánosan használt eljárás a *homogenizálás*, amelyről bővebben a következő szakaszban lesz szó.

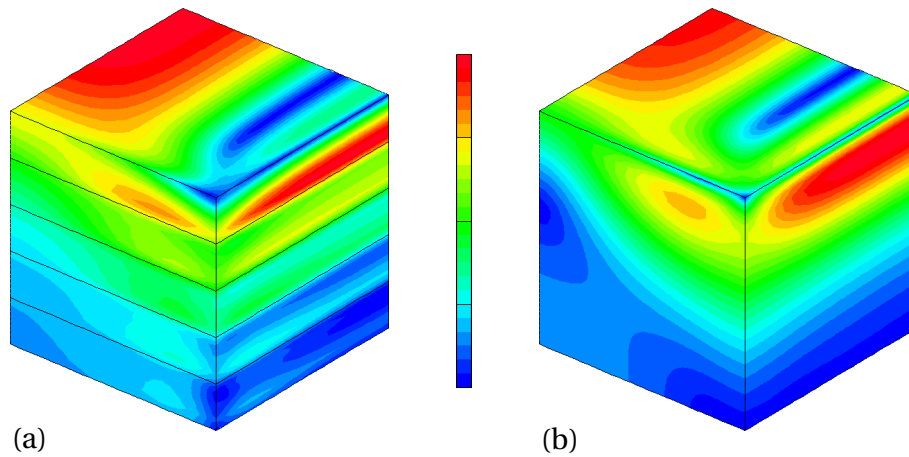
1.4. Kontinuummodellek, homogenizáció

Köztudott, hogy a Maxwell-egyenletek eleve nagyszámú részecskét feltételeznek; úgy is mondhatnánk, hogy a kontinuumszemlélet az elmélet velejárója. Az elektromágneses közegmodellek is ezt a vonalat követik: az (1.1)-(1.4) alakhoz tartozó konstitúciós egyenletek általános alakja

$$\mathbf{D} = \mathcal{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{H} = \mathcal{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{J} = \mathcal{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{E}_b, \mathbf{J}_b), \quad (1.5)$$

ahol a \mathbf{P} polarizáció a kötött töltések, az \mathbf{M} mágnesezettség pedig a kötött áramok makroszkopikus *statisztikai* hatását írja le (az \mathbf{E}_b és \mathbf{J}_b ún. beiktatott mezők a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatást képviselik).

A természetes közegeken túl vannak mesterséges struktúrák, amelyeket bizonyos méretskála felett célszerű kontinuumként kezelni. Hagyományosan ide tartoznak a kompozitok és meta-anyagok, de ide sorolhatók még különböző sodrott, fonott, csévelt vagy lemezelte szerkezetű „makroszkopikus” elrendezések is. Az esetek egy részében a finomszerkezet *periodikusan* ismétlődő tartományokra, ún. cellákra bontható. Ekkor általánosan alkalmazható a homogenizációs módszer [33], amellyel a mezőt három lépésre bontva határozzuk meg:



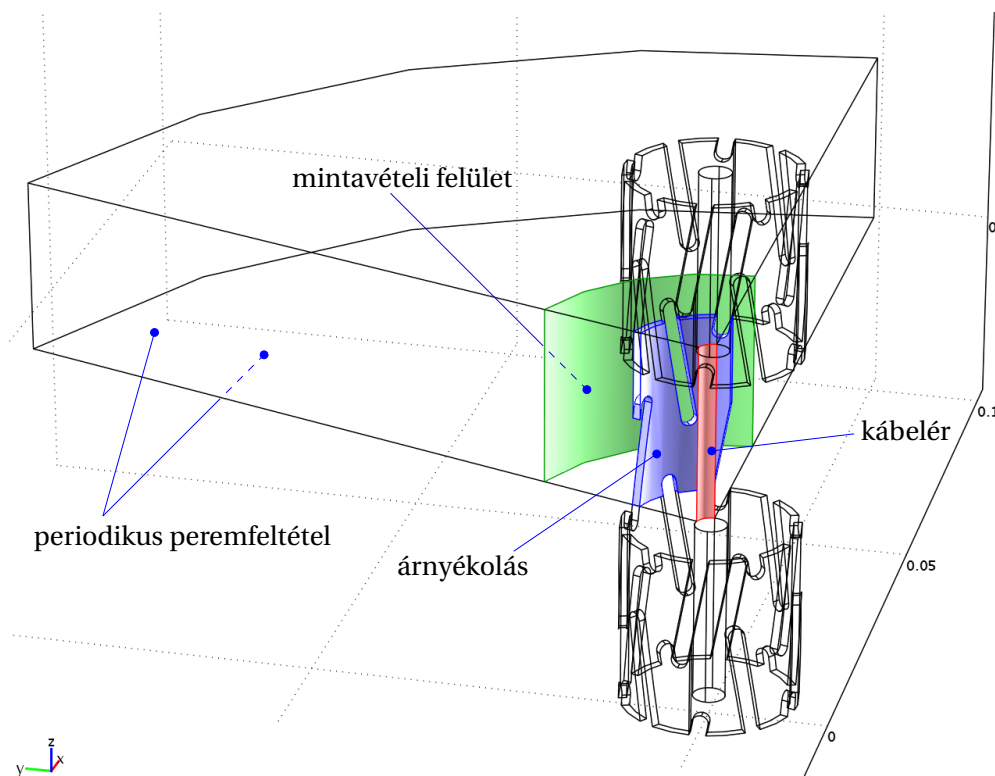
1.2. ábra. A mágneses indukció magnitúdójának pillanatértéke a lemezelt vastest egy kiemelt részletében, normált színeloszlással ábrázolva. Baloldalt a lemezekre bontott részletes (a), jobboldalt a nagy léptékű, homogenizált végelelem-modell (b) számítási eredménye látható.

1. A periodikus finomszerkezethez egy fiktív homogén közeget rendelünk, amelynek – nem ritkán anizotrop, ill. bi-anizotrop – karakterisztikáját egy *elkülönített cella* analízisével határozzuk meg.²
2. Kiszámítjuk az ún. *nagy léptékű* mezőt, melynek során a periodikus struktúrát az előző pontban meghatározott, *homogenizált* megfelelőjével helyettesítjük. Belátható, hogy az így kiszámított mező a „valódinak” egyfajta térbeli átlaga.
3. Végül – ha szükséges – *cellánkénti korrekciót* végzünk. Az elmélet szerint az egyes cellákon belüli mezőeloszlás a többitől függetlenül is *rekonstruálható*, ha ezúttal az eredeti, részletes struktúrával és anyagjellemzőkkel dolgozunk, de előírjuk, hogy az elektromos és mágneses tér *átlagértéke* megegyezzen az előző lépésben kapott nagy léptékű mező megfelelő átlagértékeivel.

Két alkalmazási példát említünk, amelyek jelen dolgozat előzményeinek tekinthetők [42]. Az egyikben az energiaátviteli transzformátor lemezelt vastestében fejlődő örvényáram- és hiszterézisvesztéseket modelleztük [96] (1.2. ábra). Mivel a vékony lemezekből álló vastest triviálisan helyettesíthető olyan homogén, anizotrop vezetőképességű közeggel, amely a lemezelésre merőleges irányban nem vezet, ezért a fenti algoritmus első lépése elhagyható. A nagy léptékű mezőeloszlás kiszámítását követően rekonstruáltuk az egyes lemezekben belüli árameloszlást, ugyanis a vasvesztés egy részéért ezek a lemez keresztmetszetében indukált kis hurkú örvényáramok a felelősek. Kiemelendő, hogy az eredendően lineáris közeget feltételező homogenizálási elvet kiterjesztettük a ferromágneses vasanyag nemlinearitásának figyelembevételével [97].

A másik esetben a villamos hajtású autókban használt kábelek árnyékolásának teljes EMC mérését szimuláltuk széles, 30 kHz–1 GHz közötti frekvenciasávban [52]. A fémszálból fonott vagy finoman lyuggatott, csőszerű (LCX) árnyékolás részletes analízisére egy, a teljes mérési

² Ez a lépés önmagában véve nem más, mint az ún. effektív anyagparaméterek meghatározása, amelyet például a meta-anyagoknál alkalmaznak.



1.3. ábra. Periodikus elemi cella a részlegesen árnyékolt LCX kábel homogenizált modelljéhez.⁴

elrendezést magába foglaló végeleemes modellben nincs mód. Ezért olyan hibrid modellt fejlesztettünk ki, amelyben az árnyékolás egy anizotrop, frekvenciafüggő, komplex vezetőképességtenzorral jellemezhető felületként írható le. A szóban forgó anyagjellemzőt a homogenizálási elv alapján, a szimmetriacella analízisével határoztuk meg (1.3. ábra). A cellánkénti, részletes mezőeloszlás meghatározására ezúttal nem volt szükség.

1.5. A dolgozat célkitűzése

E munka olyan mérnöki feladatok direkt problémájának végeleemes számításáról szól, amelyek rutineljárással történő modellezése nem – vagy csak extrém erőforrás-felhasználás mellett – vezetne eredményre. A vizsgált feladatokban közös, hogy megoldásukhoz speciális kontinuummodelleket kellett alkotni. E modellek azonban nem csupán a számítást tették hatékonyabbá, hanem segítették a jelenség mélyebb megértését, és végső soron új elmélet szintézisére vezettek.

A következő, 2. fejezetben sodrott vezetőkötettel, ún. litze huzallal foglalkozunk, míg a 3. fejezetben szupravezető szalagtekercsek modellezésével. Mindkét esetben homogenizálást alkalmazunk ugyan, de nem az előző szakaszban ismertetett sztenderd sémát, hanem speciális eljárást követve. Végül a 4. fejezetben új módszert vezetünk be a mozgó kontinuumnak egy ekvivalens álló kontinuummal való helyettesítésére.

⁴ A Comsol-lal készült ábrákon a távolságegység hallgatólágosan méter.

2. fejezet

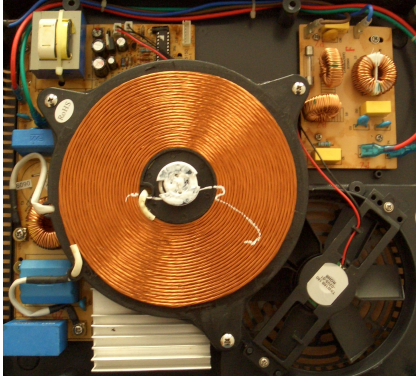
Litze huzalból készült WPT tekercsek

Ebben a fejezetben a litze huzal,¹ illetve az abból készült tekercs Joule-veszteségével foglalkozunk, amely a tekercs nagyfrekvenciás ellenállásával mérhető. Bemutatunk egy új, homogenizáción alapuló modellt, amely a huzalban disszipált teljesítmény számításán túl lehetővé teszi a veszteség mechanizmusának jobb megértését. Ezen belül a legfontosabb eredménynek a *kötegekőzi áramkiszorítás* újfajta megközelítése és az eddigieknél pontosabb leírása tekinthető. Japán kollégáinkkal egy vezeték nélküli energiaátviteli (WPT) eszköz fejlesztésén dolgoztunk a közelmúltban, amelyhez jelen munkánkkal is hozzájárultunk [47]. Ennek keretében alkalmunk nyílt arra, hogy a modellszámításokat mérésrel ellenőrizzük. A modellt a Comsol Multiphysics® végeelem-program [26] keretei között implementáltuk, és az alább bemutatott eredményeket, ábrákat is jórészt annak segítségével állítottuk elő.

2.1. Litze huzal a vezeték nélküli energiaátvitelben

A litze huzal egymástól elszigetelt, pl. zománcozott vezetősálakból sodrott vagy fonott kábel. Rádiófrekvenciás eszközökben használják (jellemzően kilohertzes tartományban), ahol speciális kialakítása révén csökkenthető az örvényáram-veszteség. Ugyanis ha az elemi szálak átmérője kisebb az adott frekvencián érvényes behatolási mélységnél, akkor az áramkiszorítás okozta veszteség jórészt kiküszöbölhető. A szálak összesodrásának szerepe pedig nem más, mint hogy az elemi szálak a huzal mentén haladva körülbelül azonos hosszon tartózkodjanak a különböző keresztmetszeti pozíciókban, azaz a huzal belsejében, illetve a peremén. Emiatt a szálak elektromágneses szempontból ekvivalenssé válnak (a végpontokra nézve azonos impedanciát mutatnak), és az áram szükségképpen egyenletesen oszlik meg közöttük, kihasználva a huzal teljes keresztmetszetét. A működés szempontjából éppen ezért lényeges, hogy a huzal két végén az összes elemi szál érintkezésbe kerüljön egymással. Az összesodort elemi szálakat *kötegeknek* nevezzük. Több ilyen köteget összefogva és megsodorva új, magasabb rendű kötegeket képezhetünk; léteznek négy-öt szintű hierarchiában kötegelt litze huzalok is, amelyek több ezer (!) elemi szálat tartalmaznak (2.1. ábra). litze huzalt használnak például rádiók középfrekvenciás

¹ Ez a német *die Litze* = zsinór szóból ered, de angolul *litz wire* a neve.



2.1. ábra. A bal oldali képen egy indukciós főzőlapba épített litze huzal látható [116]. Jobboldalt egy hasonló huzal felfeslett végén megmutatkozik a többszintű, sodrott struktúra.

tekercseiben, indukciós főzőlapokban és újabban a vezeték nélküli energiaátvitelben [30, 44, 68, 81].

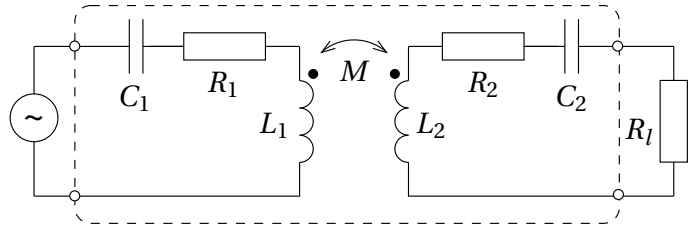
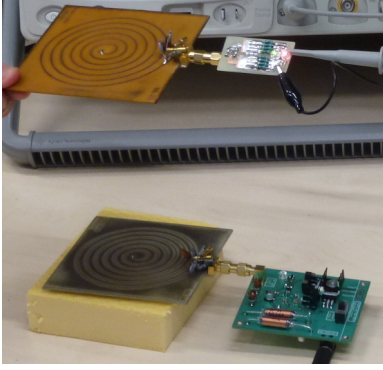
Röviden megmutatjuk, miért fontos a huzallellenállás csökkentése a WPT területén, különösen a mágnesesen csatolt, rezonancián alapuló eszközök esetében. A 2.2. ábrán egy ilyen eszköz prototípusa [108] és egyszerűsített áramkörü modellje látható: ebben L_1 , L_2 a tekercsek induktivitását, R_1 , R_2 azok veszteségi ellenállását reprezentálja, M a kölcsönös induktivitásuk, C_1 és C_2 pedig a két csatolt rezgőkör kondenzátorainak kapacitása (az utóbbiak veszteségeit elhanyagoljuk a tekercsveszteséghez képest). Belátható, hogy a generátortól az R_l fogyasztóig terjedő átviteli lánc hatásfoka:

$$\eta_t \propto |S_{21}|^2 = \left(\frac{\phi}{1 + \sqrt{1 + \phi^2}} \right)^2, \quad \text{ahol} \quad \phi = \omega_0 \frac{M}{\sqrt{R_1 R_2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (2.1)$$

A kifejezésekben S_{21} az ábrán szaggatott vonallal keretezett kétkapú szórási paramétere, ω_0 a rezonancia-körfrekvencia, ϕ pedig az ún. jósági szám (*figure of merit*, FoM) [20].

Belátható, hogy a hatásfok ϕ -vel szigorúan monoton nő, ezért a tervezés során ezt a mértékadó mennyiséget célszerű maximalizálni. Ami az ω_0 rezonancia-körfrekvenciát illeti, azt az eszköz működési frekvenciájához igazítják, emiatt egy adott alkalmazási területen lényegében rögzített értékű. A fennmaradó egyik lehetőség tehát a ϕ számlálójában lévő M növelése, amely a tekercselés geometriájától, a két tekercs egymáshoz viszonyított helyzetétől, valamint egyéb fluxusterelő elemektől (pl. ferritrudak vagy -csempék) függ. A másik lehetőség a képlet nevezőjében szereplő ellenállások csökkentése, amelyek elsősorban a felhasznált huzal belső felépítésétől, *szálszerkezetétől* függenek, ugyanakkor hatással van rájuk a tekercsek kialakítása és beépítési környezete is [27].

Jelen munka az utóbbi törekvéshez járul hozzá a huzalveszteségek pontos leírása és számítása révén, amely irányt mutathat a minél kisebb veszteségű huzalkonstrukciók kifejlesztésében.



2.2. ábra. Mágnesesen csatolt rezonancián alapuló, vezeték nélküli energiaátviteli eszköz prototípusa [108], valamint egyszerűsített áramköri sémája.

2.2. A veszteség elvi számítása

Az elektromágneses terek meghatározására az (1.1)-(1.4) Maxwell-egyenletek magneto-kvázi-stacionárius (MQS) közelítését használhatjuk [98], mivel az eltolási áramok hatása a vizsgált eszközökben, üzemi frekvencián elhanyagolható. Az egyenleteket rögtön a frekvenciatartományban fogalmazzuk meg, amit egyfelől indokol a szinuszos gerjesztés, másfelől lehetővé tesz a közegek lineárisnak vehető karakterisztikája (lásd alább):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (2.3)$$

Az egyenletekben a vektormezők *komplex amplitúdói* szerepelnek. Megjegyezzük, hogy a frekvenciatartományban az (1.3) Maxwell-egyenlet a (2.3)-ból következik, az (1.4) Gauss-törvényre pedig nincs szükség. Ezekhez járulnak az (1.5) *konstitúciós egyenletek*, amelyeket itt az alábbi speciális alakban használunk:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

A (2.4) mágneses anyagegyenletben μ a permeabilitás: levegőben és nem mágneses anyagokban a $\mu \approx \mu_0$ értékkel számolhatunk; ferromágneses közegben pedig a jellemzően nagy légrés miatt lineáris közelítéssel élünk, és szinuszos állandósult állapotban a $\mu = \mu' - j\mu''$ komplex permeabilitást használjuk. A (2.5) elektromos anyagegyenletben σ a fajlagos vezetőképesség. Mind mágneses, mind elektromos szempontból *izotrop* közegeket feltételezünk.

A disszipáció hőfejlődést jelent, ugyanakkor μ és σ köztudottan hőmérsékletfüggő, tehát elméletileg egy csatolt villamos-hőtan jelenséggel állunk szemben. Ettől azonban a továbbiakban eltekintünk, és mindenhol az említett anyagjellemzők (ismert) üzemi hőmérsékleten érvényes értékével számolunk.

Gerjesztésnek a huzal előírt áramát tekintjük (áramkényszer), amely szinuszos időfüggésű:

$$i(t) = \operatorname{Re} \left\{ I e^{j\omega t} \right\}. \quad (2.6)$$

I az áram komplex amplitúdója, $\omega = 2\pi f$ a körfrekvencia, f a frekvencia, és $j = \sqrt{-1}$ a képzetes egység. Ehhez keressük tehát a (2.2)-(2.5) parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldását az \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} és \mathbf{J} vektorokra egy V térrészben. Amennyiben V zárt, úgy a megoldás egyértelműsége érdekében *peremfeltételeket* is elő kell írunk annak ∂V peremén [98].

A megoldás ismeretében a disszipált teljesítmény Poynting tétele alapján, a komplex energiamérlegből számítható [55, 62]. A vizsgált eszközökben a dominánsan mágneses csatolás miatt a dielektromos polarizációhoz köthető veszteség általában elhanyagolható, ezért csak az ohmos és a ferromágneses összetevővel kell számolnunk:

$$P_d = P_{\text{ohm}} + P_{\text{ferr}} = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dv + \frac{\omega}{2} \int_V \mu'' \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dv, \quad (2.7)$$

amelyben (*) a komplex konjugált jele.

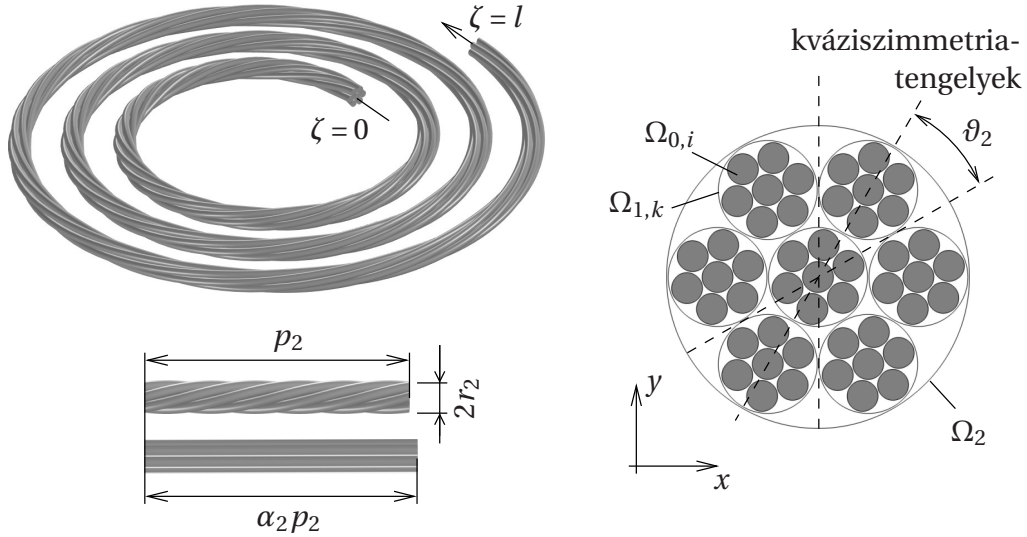
Sajnos a (2.2)-(2.5) egyenletekre a bonyolult geometria miatt nem létezik analitikus megoldás. Ugyanakkor a diszkretizáláson alapuló numerikus módszerek *direkt* alkalmazása is kilátástalan lenne az ismeretlenek nagy száma miatt. Ezért a gyakorlatban analitikus közelítések és numerikus módszerek sokféle kombinációját használják akár több lépcsőben, akár szimultán csatolva.

Analitikus közelítést – legalább a huzal elemi szálaira – szinte mindenki használ; ezek alkalmazásában a legmesszebb talán [102] megy el. Ha a huzalban viszonylag kevés elemi szál van, úgy a végelelem módszer (FEM) kombinálható például integrálegyenletekkel [58] vagy a népszerű PEEC (Partial Element Equivalent Circuit) módszerrel [88, 90, 122]. Nagyobb számú elemi szál esetén inkább a homogenizálás jön szóba, amely szintén a FEM-mel kombinálható [60, 89]. Egyébként a tömör, szigetelt vezetők csévélt (rendszerint vasmagos) tekercsek számítására igen hasonló módszerek terjedtek el, amit az áramkényszer hasonlósága indokol [53].

Az alábbiakban egy új, hatékony, többlépcsős eljárást mutatunk be a tekercsveszteség számítására, amelynek a végelelem módszer (FEM) adja a keretét, de szerepet kap benne a homogenizáció és az analitikus megoldások is (2.5). Az eljárásban messzemenően kihasználjuk a huzal speciális geometriájából, valamint az örvényáram-jelenségek elkülöníthetőségéből eredő előnyöket, ezért először ezeket ismertetjük a következő két szakaszban.

2.3. A huzal geometriája

Vizsgálatunkat az egyszerűség kedvéért olyan, egy- vagy többszintű kötegstruktúrával rendelkező huzalokra korlátozzuk, amelyek kötegei egy adott szinten *egyformák*. Azonban a bemutatott számítási módszer – jóllehet bonyolultabb formalizmus mellett – minden további nélkül általánosítható *vegyes* kötegelésű huzalokra.



2.3. ábra. A geometriai leírás illusztrálása egy 7\7 kötegrendű, hexagonális elrendezésű litze huzalból készült spiráltekercsen.

Számozzuk λ -val a *kötegelési szinteket* az elemi szálaktól ($\lambda = 0$) kiindulva felfelé, egészen a teljes huzal szintjéig ($\lambda = \Lambda$). Legyen n_λ egy λ szintű köteg alkötegeinek száma, N_λ pedig a λ szintű kötegek száma a teljes huzalban. Nyilvánvaló, hogy $n_0 = 1$ és $N_\Lambda = 1$, továbbá $N_\lambda = \prod_{i=\lambda+1}^{\Lambda} n_i$. Például a 2.3. ábrán látható huzalra $\Lambda = 2$, $n_1 = n_2 = 7$, $N_0 = 7 \cdot 7 = 49$ és $N_1 = 7$. Egy huzal ún. *kötegrendje* tömör írásmódban: $n_1 \setminus \dots \setminus n_\Lambda$.²

A vezetősálak, illetve a kötegek diszjunkt tartományokat alkotnak, amelyeket szintenként számozzunk: $V_{\lambda,k} \subset \mathbb{R}^3$ jelöli a k -adik, λ szintű köteg vezető anyagának (nem feltétlenül összefüggő) tartományát, speciálisan $V_{0,i}$ az i -edik vezetősálét, míg V_Λ a teljes huzalét. Ugyanezt a számozást alkalmazzuk a későbbiekben az adott tartományhoz köthető fizikai mennyiségekre is. A tartomány térfogata $|V_{\lambda,k}|$ avagy – a λ szintű kötegek egyformák lévén – egyszerűen $|V_\lambda|$. Végül V jelöli a teljes modelltartományt, beleértve a tekercs tágabb környezetét és a levegőt.

A modellezés során kihasználhatjuk a litze huzal speciális felépítését, illetve az abból eredő elektromágneses kényszereket. Ehhez felvesszünk egy ζ hosszkoordinátát a huzal középvonala mentén úgy, hogy a huzal eleje a $\zeta = 0$, vége pedig a $\zeta = l$ értéknél legyen (2.3. ábra). Mivel a gyakorlatban a tekercs legkisebb görbületi sugara is sokkal nagyobb, mint a huzalátmérő (az ábra spiráltekercsénél ez az arány kb. 5), ezért a huzal a hossza mentén felosztható a keresztmetszettel párhuzamos, megközelítőleg egyenes $d\zeta$ vastagságú szeletekre.

Amint látni fogjuk, bizonyos jelenségek vizsgálata leszűkíthető egy-egy ilyen szeletre. A szeletekben olyan *lokális* derékszögű koordináta-rendszert veszünk fel, amelynek x - y síkja a keresztmetszettel párhuzamos, z tengelye pedig arra merőleges. Mivel az infinitezimálisan vékony szeletben a z irányú változások általában elhanyagolhatók, ezért a szeletre vonatkozó vizsgálatokat elegendő az x - y keresztmetszeti síkban elvégezni.

Egy adott ζ keresztmetszetben a vezetők kétdimenziós tartományait a megfelelő $V_{\lambda,k}$ térré-

² A gyakorlatban igen elterjedtek a 7\6 és 6\6 kötegrendű huzalok, ahol a hiányzó középső köteg(ek) helyét műanyag távtartó tölti ki. Ennek előnyei a további szakaszokban válnak majd nyilvánvalóvá.

szekkel analóg módon számozzuk: $\Omega_{\lambda,k} \subset \mathbb{R}^2$ a k -adik, λ szintű köteget reprezentálja (2.3. ábra); speciálisan $\Omega_{0,i}$ az i -edik vezetősál, Ω_Λ pedig a teljes huzal keresztmetszete. A jelölést kiegészíthetjük a kiválasztott szeletre való utalással: pl. $\Omega_{\lambda,k}^\zeta$, Ω_Λ^ζ , stb., de bonyolultsága miatt ezzel csak ritkán fogunk élni. Az Ω_λ területe $|\Omega_\lambda|$. A következő összefüggések nyilvánvalóak:

$$\Omega_{\lambda,i} \cap \Omega_{\lambda,k} = \emptyset, \quad \forall i \neq k, \quad \text{ill.} \quad \bigcup_{k=1}^{N_\lambda} \Omega_{\lambda,k} = \Omega_\Lambda, \quad (2.8)$$

Végezetül Ω -val jelöljük a teljes keresztmetszeti *modelltartományt*, beleértve a huzal (szűkebb) környezetét a levegővel egyetemben.

Az esetek többségében az elemi szálak kör keresztmetszetűek, és a kötegek is közelítőleg annak vehetők;³ az ilyenekre bevezethetjük az r_0 , illetve r_λ ($\lambda = 1 \dots \Lambda$) sugarakat. A kötegek χ_λ *kitöltési tényezője* az alkötegek felületi hányadát adja meg a köteg keresztmetszetében; ez formálisan kiterjeszthető az elemi szálra $\chi_0 = 1$ értékkel. Például a 2.3. ábrán $\chi_1 = \chi_2 \approx 7/9$.

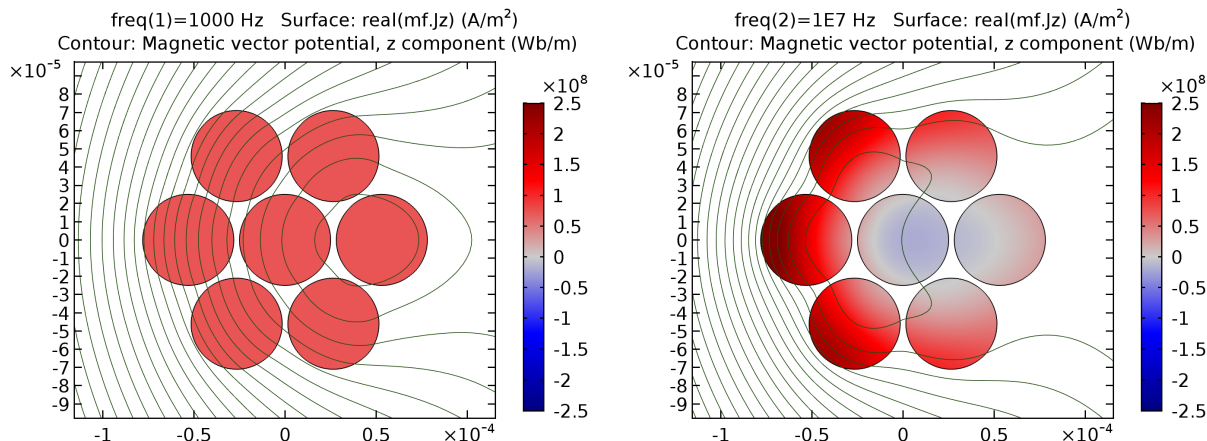
Feltételezzük, hogy az Ω_λ tartományok mindegyike több *szimmetriatengellyel* rendelkezik, amelyek egy ponton mennek át, és a síkot egyenlő (és általában viszonylag szűk) ϑ_λ szögterományokra osztják (pl. a 2.3. ábrán $\vartheta_2 = 30^\circ$). Azonban ha figyelembe vesszük a kötegek deformációját³ valamint az alkötegek *belső* struktúráját, akkor nyilvánvaló, hogy legfeljebb *kvázi-szimmetriáról* beszélhetünk (vö. 2.3. ábra).

A szálak és kötegek csavarodását a p_λ *menetemelkedéssel* jellemezzük. Számolnunk kell azal is, hogy a huzal a sodrás következtében rövidebb lesz, mint az egyenes szálak: ezt a kötegelés egyes szintjein értelmezett α_λ *rövidülési faktor* írja le (pl. a 2.3. ábrán $p_2 \approx 16r_2$ és $\alpha_2 \approx 1,035$).

A szakirodalomban analitikus formulák találhatók arra vonatkozóan, hogy milyen látszólagos pályát írnak le az egyes vezetékszálak a keresztmetszetben, miközben a huzal mentén haladunk. Például $n_\lambda \leq 6$, $\forall \lambda$ teljesülése esetén [102] képletei, $\Lambda = 1$ és $n_1 \gg 6$ esetén pedig [22] formulái vagy [87] közelítő ellipszisei használhatók. E bonyolult – és így is csak közelítő – formulák helyett a 2.6. szakaszban egy a numerikus számítások szempontjából hatékonyabb, statisztikai leírást vezetnek be a szálak keresztmetszeti pozíciójára.

A huzal imént ismertetett, speciális geometriája megenged bizonyos közelítéseket az elektromágneses terekre vonatkozóan. Például a sodrott szálak viszonylag kis mértékű csavarodása, azaz nagy menetemelkedése miatt az áramsűrűség közelítőleg hosszirányúnak vehető. Ezért bármely ζ keresztmetszetben $\mathbf{J} \approx J_z \mathbf{e}_z$ írható, és az árameloszlást a $J_z = J(x, y)$; $(x, y) \in \Omega$ komplex skalárfüggvény írja le. Az áram longitudinális komponense viszont a (2.2)-(2.3) egyenletekből következően a mágneses tér transzverzális komponensével áll közvetlen kapcsolatban, ezért a huzal vizsgálatánál a $\mathbf{H} = H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y$ feltevéssel élhetünk (azaz H_z figyelmen kívül hagyható).

³ Valójában a sodrás és egyéb mechanikai behatások (pl. húzás) következtében a kötegek (a középső kivételével) kissé deformálódnak [101].



2.4. ábra. Külső mágneses térbe helyezett, áramjárta huzal áramsűrűség-eloszlása és indukcióvonalai két különböző frekvencián, az áram maximumának pillanatában.

2.4. Örvényáram-jelenségek a huzalban

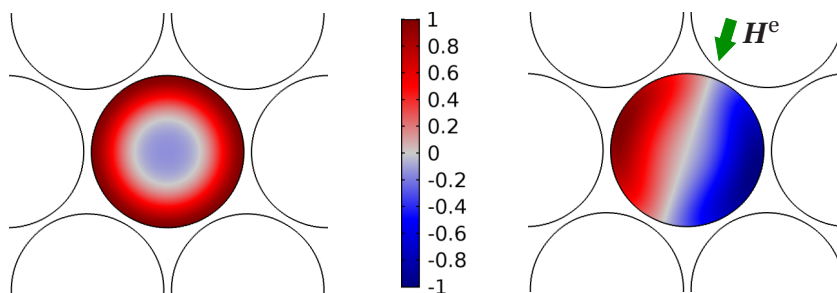
A váltakozó áramot vivő huzal környezetében fellépő, időben változó mágneses mező örvényáramot indukál a vezetőben, és módosítja az áram keresztmetszeti eloszlását. Emiatt megnő a disszipáció – és vele együtt az ellenállás – az egyenáramú esethez képest. Ezt illusztrálja a 2.4. ábra, amelyen egy hét vezetőszálból álló, hatszög-szimmetriájú huzal szimulált árameloszlása és mágneses tere látható két különböző frekvencián, azonos áramerősség mellett. A bemutatott esetben külső mágneses tér is jelen van (homogén, függőleges irányú, a kábelárammal azonos frekvenciájú és fázisú), amely eredhet például a kábelből csévéltekercs többi menetének összegzett teréből. Látható, hogy amíg alacsony frekvencián az áram egyenletes eloszlású, nagyobb frekvencián erősen inhomogén.⁴ Ezt a bonyolult áramképet többféle hatás együttes fellépése eredményezi, amelyeket külön-külön megismerve tisztábban láthatunk.

Tömör vezető árameloszlása

Egy tömör vezető árameloszlását alapvetően két mechanizmus alakítja: az áramkiszorítás avagy szkineffektus (*skin effect*, SE) és a közelségi hatás (*proximity effect*, PE) [107]. Az áramkiszorítást a vezető „saját” váltakozó áramának mágneses tere felelős, és áramképe a vezeték keresztmetszetének bármely szimmetriatengelyére nézve páros függvény (lásd 2.5. ábra, baloldalt). Az áramkiszorítás *irányadó* mennyisége a behatolás mélység, amely a geometriától független,:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (2.9)$$

⁴ Megjegyezzük, hogy ez a leegyszerűsített, kétdimenziós keresztmetszeti modell hosszú egyenes vezetőszálatat feltételez, azaz nem veszi figyelembe a szálak sodrását. Márpedig ez utóbbi a valóságban jelentősen csökkentené az árameloszlás külső tér okozta aszimmetriáját.



2.5. ábra. Áramkiszorítás (balra) és közelségi hatás (jobbra) a vezető szálban. A valóságban a két jelenség általában együtt lép fel.

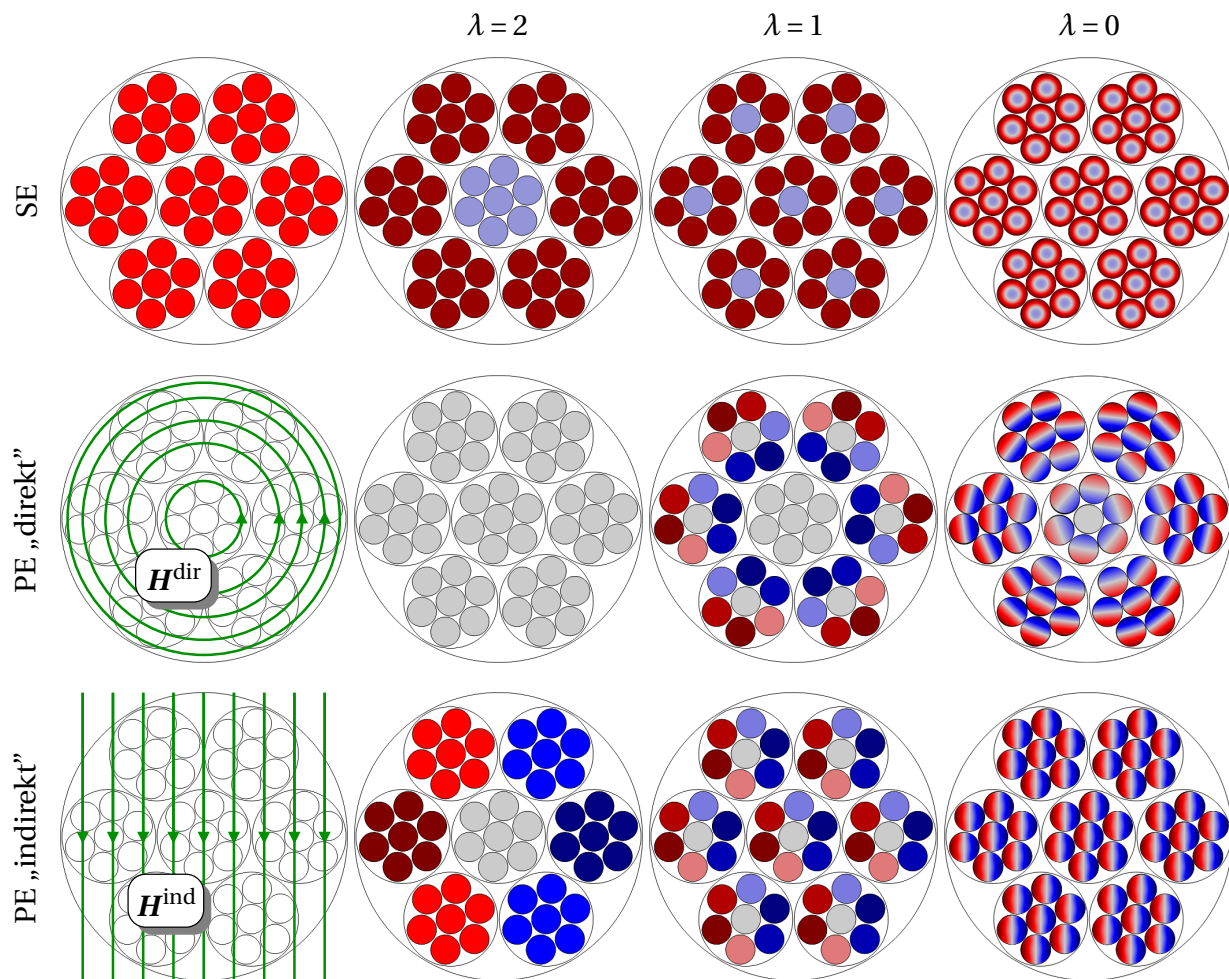
A közelségi hatás – legalábbis eredeti értelmében – a közelben elhaladó „másik” áramjárta vezető befolyását jelenti. Azonban az általánosabb tárgyalás érdekében célszerű ezt a hatást inkább egy a vezetõn „kívüli”, ún. kollektív eredő H^e mágneses térnek tulajdonítani [102]. Rögtön hozzátesszük, hogy általában a H^e teret is „ugyanaz” az I áram hozza létre, mint amelyik az áramkiszorítást, csak például a szomszédos huzalszállakon, ill. tekercsmeneteken át folyva. Amennyiben H^e homogén, és iránya párhuzamos a vezetõ keresztmetszet valamelyik szimmetriatengelyével, akkor a közelségi hatás áramképe az adott tengelyre nézve *páratlan* függvény (lásd 2.5. ábra, jobboldalt).

Az SE-PE felosztás alapja és jelentősége, hogy gerjesztéseik elkülönülnek, ugyanakkor a (2.2)-(2.5) egyenletek linearitása miatt érvényes rájuk a *szuperpozíció*. Ebből következően áramaik külön-külön számíthatók, majd összegezhetők. Mi több, az említett *paritási* jellemzők miatt az általuk keltett (2.7) disszipáció is ugyanígy felbontható. Ezt a – nem magától értetődő – *ortogonalitási* tulajdonságot a 2.7. szakaszban fejtjük ki bővebben.

Vezetőkötegek árameloszlása

A bemutatott két jelenséget elsősorban tömör vezetőkre szokás értelmezni; ez a litze huzalnál az elemi szálak szintjének (*strand-level*, SL) felel meg. Ám ugyanezek a mechanizmusok működnek a kötegek viszonylatában (*bundle-level*, BL) is, és végső soron hasonló jelenségekre vezetnek [87, 101, 114]. Többszintű kötegelésnél e jelenségek *hierarchiába* szervezhetők. A 2.6. ábrán – [102] nyomán – az SE és PE különböző szintű, *hipotetikus* áramképeit mutatjuk be: ez úgy értendő, mintha egy-egy esetben az összes többi hatást, mintegy „mágikusan” kikapcsoltuk volna. A PE jelenségeken belül elkülöníthetjük még a huzaláram által „közvetlenül” keltett H^{dir} , illetve a „közvetve” keltett H^{ind} mágneses tér hatását (pontosabb definíciójuk a 2.5.2. szakaszban), amelyet a már említett szuperpozíció-elv tesz lehetővé [101]. Vegyük észre, hogy az ábrán bemutatott magasabb rendű SE és PE áramképek ugyanolyan szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek, mint a tömör vezetõbeli megfelelőik. Hozzá kell tennünk azonban, hogy a geometriai szimmetria tökéletlensége miatt (vö. 2.3. ábra) inkább csak *kvázipáros*, illetve *kvázipáratlan* függvényekről beszélhetünk.

Az idézett szakirodalom azt sugallja, hogy a 2.6. ábra képsora a huzaláram egyfajta „modá-

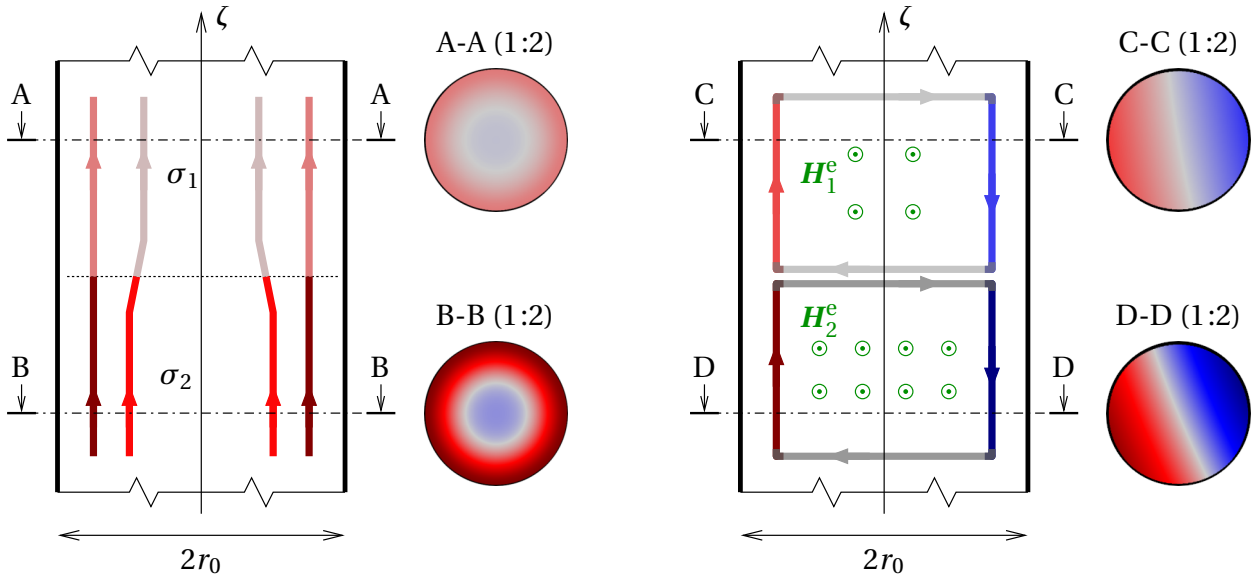


2.6. ábra. Áramkiszorítás és közelségi hatás *szemléltetése* a kötegstruktúra különböző szintjein. A közelségi hatásnál baloldalt a feltételezett gerjesztés-összetevő látható.

lis” felbontásának tekinthető. A módus fogalmának használatát ráadásul indokolná a különböző szintű SE- és PE-teljesítmények összegezhetsége (lásd 2.7. szakasz). Azonban az irodalom többnyire adós marad úgy a felbonthatóság fizikai megokolásával, mint az áramtagok matematikai formába öntésével, de különösen az utóbbiak számítási módjával; ehelyett jobb híján beéri a puszta illusztrálással.⁵ Mindenesetre ez az *ad hoc* felbontás ihlette a 2.5. szakaszban bemutatott, hiánypótló számítási módszert.

Az SL és BL effektusok között az az alapvető különbség, hogy míg a vezetőszálon belül az árameloszlás változhat a huzal hossza mentén (lásd 2.7. ábra), addig a vezetőszálak, ill. kötegek viszonylatában – a szigetelés miatt – ez nyilván nem lehetséges. Ebből az az ellentmondás következik, hogy bár valamely BL effektus okozta árameloszlás egyértelműen jellemezhető egyetlen (2D) keresztmetszete által, ugyanakkor számítása elvileg a huzal, ill. tekercs teljes (3D) modelljét igényli. És viszont: az SL jelenségek jó közelítéssel modellezhetők egy-egy keresztmetszeti (2D) szeletben, azonban a számítást elvileg a huzal minden egyes szeletére el kell végezni.

⁵ A szintenkénti SE-PE felbontás talán legrészletesebb tárgyalása a [102] cikkben található. Azonban ott a szerző elsődleges célja módszer adni a köteg szintű effektusok eliminálására, ezért nem vehető zokon tőle, hogy nem mélyed el kellőképpen az eliminálandó jelenségek elemzésében.



2.7. ábra. A szálszintű áramkiszorítás (baloldalt), illetve közelségi hatás (jobbaldalt) okozta árameloszlás hossz menti változásának szemléltetése kör keresztmetszetű vezetőre.

Osztályozás

Összefoglalásul áttekintjük, hogy az egyes részjelenségek modellezésénél milyen egyszerűsítési lehetőségeink vannak, illetve milyen problémákkal kell szembenéznünk. Hozzá kell tennünk, hogy mivel az említett jelenségek *mindegyike* csak növeli a veszteséget (vö. 2.7. szakasz), ezért a huzal kialakításánál eleve azok lehetőség szerinti eliminálására törekednek. Ebből következően némelyikük modellezése is feleslegessé válhat.

- A szálszintű áramkiszorítás (*strand-level skin effect*, SLSE) köztudottan elhanyagolható, ha $r_0 \lesssim \delta$. Ha ez mégsem teljesül, akkor viszont figyelembe vehető, hogy a 2.7. ábra szerinti áramátrendeződés csak a szálkérszmetzet vagy a vezetőképesség hossz menti változása következtében jöhet létre. Mivel az utóbbiak a gyakorlatban nem változnak, ezért az SLSE a huzal teljes hosszára vonatkozóan egyetlen 2D síkproblémaként modellezhető. Ráadásul egyszerű, pl. kör alakú keresztmetszetre analitikus megoldása létezik (lásd 2.5. szakasz).
- A szálszintű közelségi hatás (*strand-level proximity effect*, SLPE) a többi vezető kollektív \mathbf{H}^e mágneses teréből ered, ezért célszerű a huzal olyan, minél hosszabb $\Delta\zeta$ szakaszaira kiszámítani, amelyekre \mathbf{H}^e közelítőleg állandó (2.7. ábra). Speciálisan, ha $\mathbf{H}^{\text{ind}} \ll \mathbf{H}^{\text{dir}}$ (vö. 2.6. ábra), akkor $\Delta\zeta \sim l$. Egyszerű alakú szálkérszmetzet árameloszlására létezik analitikus megoldás, illetve $\lambda = 1$ szintű kötegben a veszteség homogenizálással is számítható (bővebben lásd a 2.5. szakaszban). Megjegyezzük, hogy az SLPE összetevő sem a szálmérő csökkentésével, sem a sodrással nem eliminálható, legfeljebb mérsékelhető.
- A kötegszintű áramkiszorítás (*bundle-level skin effect*, BLSE) a szálak ill. kötegek összehozódásával nagymértékben csökkenthető ugyan de általában nem szüntethető meg. Ép-

pen ezért fontos a számítása. A 2.6. szakaszban új módszert javaslok, amellyel az elvileg megkívánt 3D modell egy 2D homogenizált keresztmetszeti modellre redukálható.

- A kötegszintű közelségi hatás (*bundle-level proximity effect*, BLPE) számítása a legbonyolultabb. Ugyanakkor szerencsére ez az összetevő az, amely a sodrással a leginkább csökkenthető [103], és – bizonyos enyhe feltételek mellett – akár el is hanyagolható (lásd 2.5. szakasz).

2.5. Többléptékű, hierarchikus modell a veszteség számítására

Mivel a tekercs-, illetve huzalgeometria részletei igen széles méretskálán mozognak, ezért a gyakorlatban elterjedtek az ún. *többléptékű* (*multiscale*) modellezési eljárások (lásd pl. [27, 53, 69, 85, 89, 103]). Ezek általános felépítése a következő:

- Először egy *nagy léptékű* modellt vizsgálnak, amely magában foglalja a teljes tekercset és annak környezetét, de a huzalt egyszerű tömör vezetőként vagy idealizált „áramszálként” veszi figyelembe.
- A következő, *közepes léptékű* modellben már csak a huzal szerepel, de részletesebb struktúrával. A nagy léptékű megoldás ebben egyfajta *beiktatott* külső térként, azaz független gerjesztésként jelenik meg.
- Végül az elemi szál *kis léptékű* modelljében vizsgálható annak SE, ill. PE árameloszlása (vö. 2.4. szakasz) valamint az abból eredő veszteség. A többi szál, valamint a tágabb környezet *átlagolt* hatása ezúttal is külső térként jelenik meg.

Az eljárás hátterében hallgatólagosan az a *hipotézis* áll, hogy a kisebb léptékű modell által feltárt részletek a nagyobb léptékű modellben csupán elhanyagolható perturbációként jelennének meg, más szóval az előbbi „nem hat vissza” az utóbbira.

A különböző léptékű modelleket a gyakorlatban változatos módon, és nem is feltétlenül ebben a sorrendben alkalmazzák. Előfordul például, hogy a vezetőszálat egy kváziperiodikus struktúra elemi cellájának tekintve, homogenizált anyagjellemzőt határoznak meg a kötegre vonatkozóan, majd azt a közepes léptékű huzalmodellben, vagy akár a nagy léptékű modellben érvényesítik [53, 69, 85]. Gyakori továbbá, hogy csak két modellt („makroszkopikus” és „mikroszkopikus”) állítanak fel, ahol az utóbbi a közepes és kis léptékű modellek kombinációja [89]. Végül a kis léptékű (szálszintű) árameloszlásokra vonatkozóan – egyszerű geometriájú, pl. kör keresztmetszetű vezetőszálok esetén – analitikus megoldások állnak rendelkezésre [107], ezért nem igénylik numerikus modell felállítását.

Az alábbiakban egy olyan új veszteségszámítási eljárást mutatunk be, amely követi az imént ismertetett hármas felosztást (nagy, közepes, ill. kis léptékű modell), de a közepes léptékű modell a huzal kötegrendjének megfelelően további *alszintekre* tagolódik (2.8. ábra). A szintek kapcsolata hasonló, mint a különböző léptékű modelleké: a huzal árameloszlásának a kötegelés

adott λ szintjére kiszámított, „diszkrét” közelítését rendre gerjesztésként (integrális feltételként) írjuk elő az eggyel alacsonyabb ($\lambda - 1$) szinten, ily módon szintről-szintre haladva növeljük az áramkép részletgazdagságát, mígnem elérjük az elemi szálak szintjét.

Az eljárás blokkdiagramja a 2.8. ábrán látható. Ebben nemcsak a számítási műveletek sorrendje, bemenete és kimenete, hanem a „jelek” (áram, mágneses tér, teljesítmény) függőségei és transzformációi is kézzelfoghatóan megjelennek. A hálózat bemenete a tekercs I árama, kimenetei pedig a veszteségi teljesítmény összetevői:

$$P_d = P_{\text{add}} + P_{\text{litz}} = P_{\text{add}} + P_{\text{dc}} + P_{\text{se}} + P_{\text{pe}}, \quad (2.10)$$

ahol P_{add} a tekercs környezetében fellépő járulékos veszteség, és P_{litz} a huzalban keletkező veszteség. Utóbbi tovább bontható a frekvenciafüggetlen P_{dc} , az áramkiszorításhoz köthető P_{se} , valamint a közelségi hatáshoz köthető P_{pe} veszteségekre (lásd 2.7. szakasz).

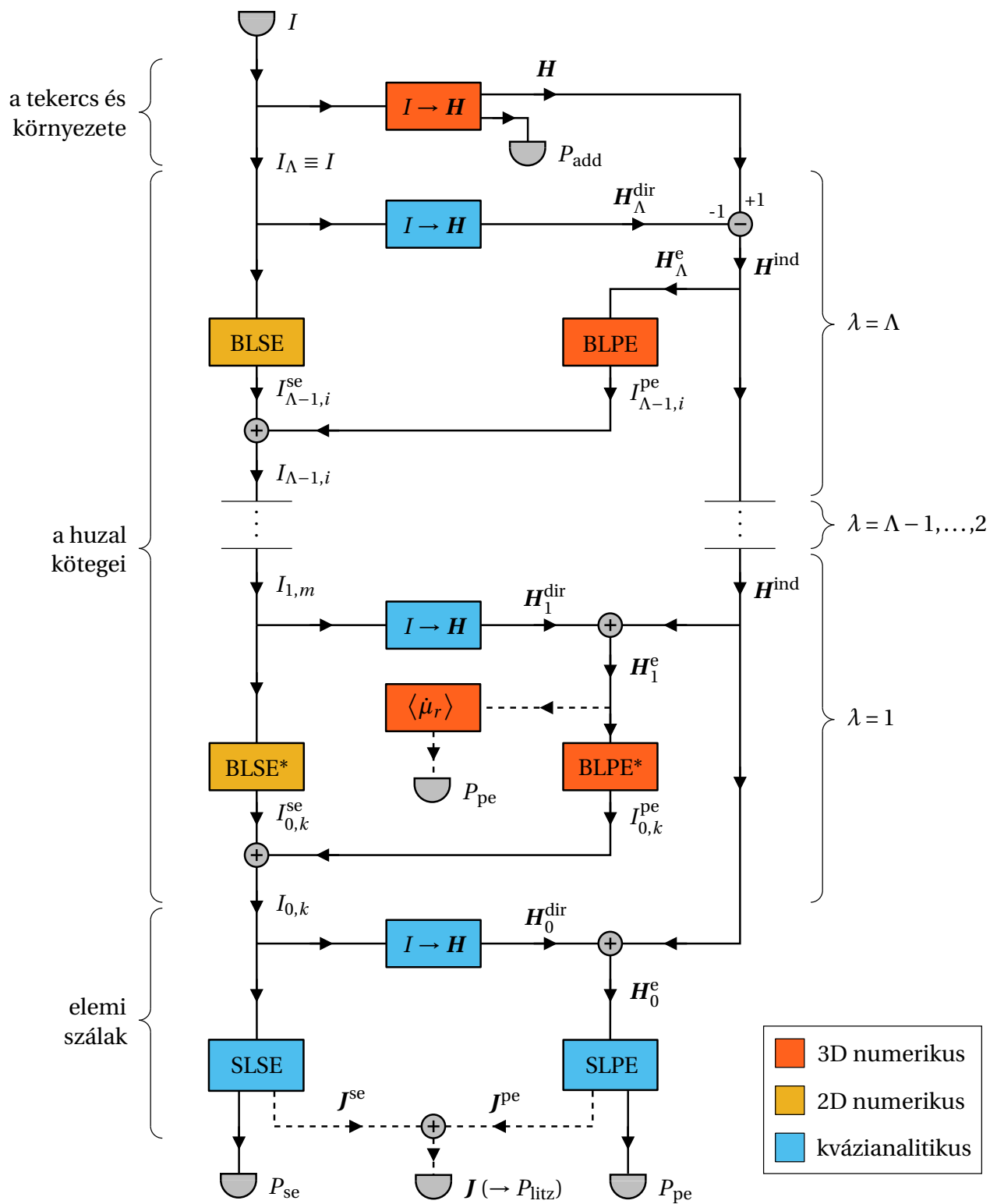
Hasonló, szintekre bontott huzalmodellek egyébként fellelhetők a szakirodalomban is (lásd pl. [101, 102, 103]), azonban i) tárgyalásuk részben hiányos vagy elnagyolt, ii) néhány ki nem mondott, ellenőrizetlen, illetve ellenőrizhetetlen feltevésen alapulnak, iii) tartalmazzanak néhány nem megengedhető közelítést (ezekről bővebben a 2.6. szakaszban). Bár az itt javasolt eljárás blokkjai részben a szakirodalomból is ismert számítási módszereket takarnak, ám azok újszerű módon lettek összekapcsolva. Ezen túlmenően a köteggközi áramkiszorítás (BLSE) számítása a korábbiaktól teljesen eltérő módszerrel történik (2.6. szakasz).

Meg kell jegyezni, hogy a bemutatott diagram a lehető legáltalánosabb esetet mutatja, míg valamely konkrét huzalt vizsgálva számos blokkja elhagyható. Az áramkép szintenkénti finomítása különösen a több kötegszintű, sok vezetőszálat tartalmazó, bonyolult litze huzalok esetében lehet hasznos és indokolt, ezért a 2.8. szakaszban az eljárást egy $\Lambda = 4$ kötegszintű, összesen 4200 elemi vezetőszálból álló huzalon demonstráljuk. Az alábbiakban részletesen bemutatjuk a számítási eljárás lépéseit, amelyeket érdemes a 2.8. diagramon nyomon követni.

2.5.1. Nagy léptékű modell: a tekercs és környezete

Első lépésként a (2.2)-(2.5) MQS egyenleteket oldjuk meg a tekercs és környezete *nagy léptékű* modelljére, áramkényszer mellett (2.8. ábra, legfelső, narancsszínű $[I \rightarrow \mathbf{H}]$ modul). A huzalt vagy egyszerű hengeres geometriával vesszük figyelembe (ekkor *homogén* eloszlású I áramot írunk elő benne), vagy idealizált I áramszálként (ekkor viszont számolnunk kell a *szingularitással*). A huzal vezetőképességét itt még nem kell figyelembe vennünk. A számítás eredménye a \mathbf{H} átfogó mágneses tér, valamint a \mathbf{J} áramsűrűség a huzalt környező esetleges vezető anyagokban; ezekkel a veszteségi teljesítmény járulékos része (2.7) alapján így írható:

$$P_{\text{add}} = \frac{1}{2} \int_{V \setminus V_\Lambda} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dv + \frac{\omega}{2} \int_{V \setminus V_\Lambda} \mu'' \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dv. \quad (2.11)$$



2.8. ábra. A többszintű számítási eljárás jelfolyamhálózatos blokkdiagramja. A számítási blokkok színe tükrözi az erőforrásigényt; a szaggatott összekötések alternatív módszert jelölnek.

A szóban forgó térszámítási probléma megoldására több numerikus módszer létezik; alkalmazhatóságuk elsősorban az érintett közegek elektromágneses tulajdonságaitól, másodsorban a geometria bonyolultságától függ. A legegyszerűbb esetben, amikor csak levegő, vagy azzal közel azonos permittivitású és permeabilitású közegek vannak a tekercs közelében, akkor az integrálegyenletek módszere (IE) tűnik a leghatékonyabbnak. Ezen belül ha a tekercs ritka menetű, akkor vonalszerű diszkretizálás, vagy huzalmenti, egyváltozós globális sorfejtés használható [15]. Ha a tekercs sűrűn csévélt, illetve a környezetében fémtárgy van, akkor az IE még mindig hatékony, de már felületszerű diszkretizálást igényel [4, 8, 9]. Végül ha nem vezető ferromágneses közeg (pl. ferrit) is jelen van, akkor térfogati diszkretizálás szükséges, amelyhez a legmegfelelőbb a végeelem módszer (FEM). Mivel ebben zárt modelltartományt kell felvennünk, ezért a (2.2)-(2.5) egyenleteket még ki kell egészíteni a megfelelő peremfeltételekkel. Megemlítjük, hogy vannak kísérletek a FEM és az IE házasítására, amellyel mindkét módszer előnyei kihasználhatók [3].

A vizsgált WPT eszközök környezetében döntően (nagy intenzitással) a mágneses tér van jelen, míg az elektromos tér intenzitása jobbra csak a tekercsmenetek között, illetve a kondenzátorok zárt térfogatában nagy. Emiatt a huzalszigetelés és a tekercset beágyazó dielektrikumok vesztesége elhanyagolható, továbbá a mágneses tér eloszlására gyakorolt perturbáló hatásuk is csekély.⁶ A gyakorlatban azonban fontos lehet az ilyen szigetelő objektumok *detektálása*: ez a WPT ún. „idegen test” (*foreign object*) problémája. Ennek szimulációjához viszont a Maxwell-egyenletek MQS közelítése már nem elegendő, helyette a teljes hullámtani (*full-wave*), vagy legalább a kvázistacionárius Darwin-modell szükséges [5]. Megemlítendő, hogy az integrálegyenleteknél ilyenkor jól alkalmazható az ún. perturbációs módszer [80], illetve ugyanott kihasználható a szigetelő objektum speciális szimmetriája [11, 16]. Mivel jelen munka elsődleges célja a veszteség számítása, ezért a továbbiakban az MQS közelítést használjuk, és a modellben a dielektrikumot levegővel helyettesítjük.

2.5.2. Közepes léptékű modell: a kötegstruktúra

Ebben a szakaszban a huzalra összpontosítunk: célunk az elemi szálak $I_{0,k}$, $k = 1, \dots, N_0$ áramainak meghatározása az I összáramból, valamint a nagy léptékű modell szolgáltatotta \mathbf{H} mágneses térből kiindulva. Ezt a kötegstruktúrán szintről-szintre lefelé haladva és fokozatosan finomítva érjük el (2.8. ábra), mégpedig oly módon, hogy egy adott λ szinten rendre ismertnek tekintjük az $I_{\lambda,i}$, $i = 1, \dots, N_\lambda$ kötegáramokat, és abból meghatározzuk az „eggyel részletesebb” $I_{\lambda-1,m}$, $m = 1, \dots, N_{\lambda-1}$ árameloszlást. A kötegelés minden egyes szintjén két kvázi független jelenséget vizsgálunk párhuzamosan (vö. 2.4. szakasz): a kötegszintű áramkiszorításnál (BLSE) minden $I_{\lambda,i}$ kötegáramot felosztunk – fáziseltérést is megengedve – a benne foglalt $\lambda - 1$ szintű kötegek között (ezek az $I_{\lambda-1,m}^{\text{se}}$ áramösszetevők), míg a kötegszintű közelségi hatásnál (BLPE) a $\lambda - 1$ szintű kötegeken oda-vissza folyó, nulla eredőjű $I_{\lambda-1,m}^{\text{pe}}$ áramokat számítjuk ki. A keresett áram-

⁶ Más a helyzet, ha legalább az egyik tekercs nagy kiterjedésű, nagy dielektromos állandójú közegbe merül [11, 46], mint például a testbe ültetett implantátumok vagy a víz alatti eszközök energiaellátásánál.

eloszlás a kettő szuperpozíciója:

$$I_{\lambda-1,m} = I_{\lambda-1,m}^{\text{se}} + I_{\lambda-1,m}^{\text{pe}} \quad m = 1, \dots, N_{\lambda-1}. \quad (2.12)$$

A következő alpontokban a közepes léptékű modell (vö. 2.8. ábra) egyes számítási blokkjait tárgyaljuk. Kiemelendő, hogy ezek mindegyike mögött egy-egy jól definiált – bár némileg elvonatkoztatott – *fizikai probléma* áll.

A kollektív eredő mágneses tér számítása

A BLPE modelljében a gerjesztést a \mathbf{H}_λ^e mágneses tér jelenti, amely az adott kötegen, ill. szálon kívül folyó áramok *kollektív eredő* tere. Módszertani szempontból ezt célszerű egy *közvetlen* (direkt) és egy *közvetett* (indirekt) részre bontani [37] (vö. 2.6. ábra):

$$\mathbf{H}_\lambda^e = \mathbf{H}_\lambda^{\text{dir}} + \mathbf{H}^{\text{ind}}. \quad (2.13)$$

A direkt összetevőt a huzal térfogatában, azon belül is a vizsgált ζ keresztmetszetben és annak „közelében” (pl. $\Delta\zeta = \nu \cdot r_\Lambda$, $\nu \approx 5 \dots 10$ hossz menti távolságon belül) folyó áram kelti, kizárva ebből természetesen az adott kötegre, ill. szála eső részáramot. Ezzel szemben az indirekt összetevőért az összes többi hatás együttvéve felelős, beleértve a huzal távolabbi szakaszain, illetve a tekercs szomszédos menetein folyó áramokat, a közeli fémtárgyakban (pl. árnyékoló lemezekben) fellépő másodlagos örvényáramokat, valamint a közeli ferromágneses anyagok (pl. ferritcsempék) fluxusterelő hatását.

A direkt összetevőt a következőképpen számíthatjuk ki (2.8. ábra, kék színű $I \rightarrow \mathbf{H}$ blokkok). Először képezzük egy ζ keresztmetszetben az áramsűrűség adott szintű közelítését, kihagyva belőle a vizsgált k -adik köteg, ill. szál áramát:

$$J_\lambda^{(k)}(x, y, \zeta) = \begin{cases} I_{\lambda,i}/|\Omega_\lambda| & i \neq k \\ 0 & i = k \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_{\lambda,i}^\zeta. \quad (2.14)$$

Azonban a tapasztalat azt mutatja, hogy ha ehhez a k -adik köteg, ill. szál áramát is hozzávesszük, az a \mathbf{H}_λ^e teret alig befolyásolja,⁷ viszont így a továbbiakban (k -tól megszabadulva) jóval egyszerűbb formalizmussal dolgozhatunk:

$$J_\lambda(x, y, \zeta) = \frac{I_{\lambda,i}}{|\Omega_\lambda|} \quad (x, y) \in \Omega_{\lambda,i}^\zeta. \quad (2.15)$$

A következő lépés a mágneses tér meghatározása a (2.15) árameloszlás egy $[\zeta - \Delta\zeta, \zeta + \Delta\zeta]$ szakaszának figyelembevételével. A gyakorlati huzalgeometriák lehetővé teszik, hogy ezt *egyenés*

⁷ A szakirodalom ezt az alköteg, ill. szál „önárnyékoló” (*self shielding*) hatásának nevezi, és ugyancsak elhanyagolhatónak találja [102].

vonalevezetők mágneses terének szuperpozíciójával közelítsük [98]:⁸

$$\mathbf{H}_\lambda^{\text{dir}}(x, y, \zeta) \approx \iint_{\Omega^\zeta} \frac{J_\lambda(x', y', \zeta) \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dx' dy', \quad (2.16)$$

ahol $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y$.

Az indirekt összetevő lényegében a nagy léptékű modellel (2.5.1. szakasz) meghatározott átfogó \mathbf{H} térnek felel meg, amely azonban tartalmazza a direkt összetevőt is – jóllehet elnagyolt, Λ szintű közelítésben – ezért az utóbbit ki kell vonni belőle:

$$\mathbf{H}^{\text{ind}} \approx \mathbf{H} - \mathbf{H}_\Lambda^{\text{dir}}. \quad (2.17)$$

A (2.13) szétválasztás értelme éppen az, hogy míg a \mathbf{H}^{ind} összetevőt csupán egyszer, a közepes léptékű szakasz elején számítjuk ki, addig a $\mathbf{H}_\lambda^{\text{dir}}$ összetevő minden szinten egyre nagyobb pontossággal áll rendelkezésre. A kettőt ezért minden $\lambda < \Lambda$ szintű BLPE lépés előtt rekombináljuk. Felmerülhet a kérdés, hogy a $\lambda = \Lambda$ szinten ezt miért nem tesszük meg, azaz miért csak a $\mathbf{H}_\Lambda^e \equiv \mathbf{H}^{\text{ind}}$ indirekt térrel számolunk (2.8. ábra). A magyarázatot a 2.6 ábrán találjuk: ezen a szinten a $\mathbf{H}_\Lambda^{\text{dir}}$ direkt összetevő szimmetrikus örvényáramképet eredményez, amely éppen az áramkiszorításnak (SE) felel meg; emiatt hagytuk az ábrán üresen a PE áramképet.

A későbbiekre nézve megjegyezzük, hogy a mágneses teret keltő részáramok (pl. kötegearámok) akár eltérő fázisúak is lehetnek. Ez pedig a helykülönbséggel kombinálva azt eredményezi, hogy \mathbf{H}^e nem feltétlenül tisztán alternáló mező, hanem forgó összetevője is lehet. A mágneses tér *polarizáltságának*, avagy *ellipticitásának* kérdésére a későbbiekben még visszatérünk.

Áramkiszorítás a kötegek között (BLSE)

Ebben a blokkban a kötegszintű áramkiszorítást vizsgáljuk a $\lambda > 1$ szinteken, vagyis egy köteg áramának az *alkötegei* közötti megoszlását keressük azzal a feltétellel, hogy a kötegen kívüli eredetű \mathbf{H}^e mágneses teret figyelmen kívül hagyjuk. A továbbiakban ezt *kötegeközi (inter-bundle)* áramkiszorításnak nevezzük [47].

Válasszuk ki az i -edik λ szintű köteget, és *idealizáljuk*: önmagában állónak, végtelen hosszúnak és egyenesnek tételezzük fel; pontosabban eltekintünk a huzalbeli tekeredésétől, azonban a saját és alkötegei sodrásától nem. A köteg $I_{\lambda,i}$ áramát adottnak véve (áramkényszer) keressük a (2.2)-(2.5) MQS egyenletek megoldását a \mathbf{J} áramsűrűségre vonatkozóan, a következő mellékfeltétellel (homogenitási kényszer):

$$J_z(x, y, z) = \tilde{J}_k \text{ (konst.)} \quad (x, y) \in \Omega_{\lambda-1,k}^z \subset \Omega_{\lambda,i}^z, \quad (2.18)$$

amely lényegében azt fejezi ki, hogy az alkötegek árameloszlása bármely keresztmetszetben *egyenletes* (lévén a köteg egyenes, ζ szerepét itt a z koordináta veszi át). Ez első látásra mes-

⁸ A képletben a szingularitás kezelése – ti. amikor a nevező nullává válik – némi körültekintést igényel. A szóban forgó síkprobléma természetesen numerikus módszerrel (pl. FEM) is hatékonyan megoldható.

terkéltnek tűnhet, de vegyük észre, hogy ha a $\lambda - 1$ szintű alkötegek sodrása *ideális*, azaz vezetőszálaik elektromágneses szempontból ekvivalensek, akkor abból éppen ez a feltétel következik! A homogenitási kényszer ezért nevezhetjük *köteggényszernek* vagy *alköteggényszernek* is.

A vázolt MQS probléma elvileg 3D térszámítást igényel. Ha a végelelem módszert választjuk, akkor radiális irányban ún. *távoli lezárást*, pl. *végtelen elemeket* használhatunk, míg tengelyirányban *periodikus peremfeltételt* célszerű előírni a $z = 0$ és $z = p_\lambda$ síkokon [26]. Mindazonáltal a számítás erőforrásigénye igen nagy lehet. A 2.6. szakaszban olyan, homogenizáláson alapuló módszert mutatok majd be, amellyel a feladat 2D síkproblémára redukálható, ráadásul megoldása közvetlenül a keresett $I_{\lambda-1,k}^{\text{se}}$, $k = 1 \dots n_\lambda$ alkötegáramokat szolgáltatja.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kötegáramok ilyenén újraosztása (BLSE) mindaddig nem folytatható alsóbb szinten, ameddig ugyanazon a szinten meg nem határoztuk a közelségi hatásból eredő $I_{\lambda-1,k}^{\text{pe}}$, $k = 1 \dots n_\lambda$ áramképet,⁹ az ugyanis a következő lépésben már a gerjesztés részét képezi (lásd 2.8. ábra).

Kötegszintű áramkiszorítás a gyakorlatban akkor léphet fel, ha az alkötegek a sodrás dacára is kiegyenlíthetetlenek maradnak. Tipikus eset, ha van olyan alköteg, amelyik végig a köteg közepén halad (lásd 2.9/a ábra). Ennek I_c árama (c = „centrális”) eltér a külsők I_p áramától (p = „periférikus”).¹⁰ A BLSE tehát elvileg kivédhető a kötegek sodrásának megfelelő tervezésével.

A [103] irodalom például azt javasolja, hogy egy-egy köteg ne tartalmazzon ötnél több alköteget, azaz $n_\lambda < 5$, $\forall \lambda$ teljesüljön. Ennek azonban ára van: a bonyolultabb és drágább gyártási eljárások túlmenően az ilyen huzal keresztmetszeti kihasználtsága rosszabb, veszteségének frekvenciafüggetlen része (más szóval az egyenáramú ellenállása) nagyobb, mechanikai tulajdonságai pedig gyengébbek, mint például az azonos keresztmetszetű, hetes kötegelésű, hexagonális huzalé. Egy másik megoldás, ha a hetes kötegelésű huzal középső kötegeit rendre hengeres műanyag távtartóval helyettesítjük. A fajlagos vezető keresztmetszet itt is csökken ugyan, de legalább a mechanikai szilárdság megőrizhető.

Mindenesetre ha valahogy sikerül elérni, hogy az adott szinten az alkötegek elektromágnesesen kiegyenlíthetettek legyenek, akkor az áramok számítása a BLSE-MQS probléma megoldása helyett a triviális

$$I_{\lambda-1,k}^{\text{se}} = \frac{I_{\lambda,i}}{n_\lambda} \quad k = 1, \dots, n_\lambda \quad (2.19)$$

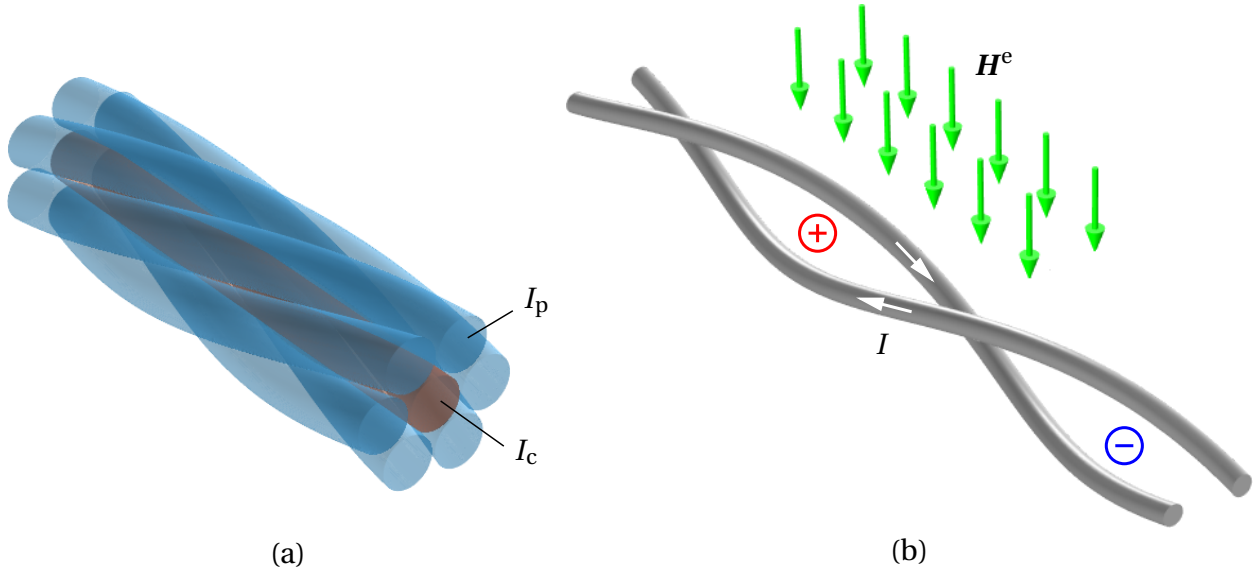
műveletre redukálódik, amely a kötegáram egyenlő eloszlását jelenti az alkötegek között.

Áramkiszorítás a kötegen belül (BLSE*)

Speciálisan a $\lambda = 1$ szint esetében *kötegen belüli (intra-bundle)* áramkiszorításról beszélünk, és az előző pontban tárgyalt $\lambda > 1$ szintektől kissé eltérően kell kezelni. Ennek egyik oka, hogy a (2.18) homogenitási kényszer az elemi szálakra nem áll fenn. A másik, fontosabb ok, hogy a

⁹ Habár ezt a szakirodalomban gyakran (hibásan) megteszik; például ez rejlik a [102] irodalom (12) *ad hoc* teljesítményképlete mögött is.

¹⁰ Azt hihetnénk, hogy mivel a középső alköteg rövidebb, mint a külsők, ezért ellenállása kisebb és így árama nagyobb azokénál. Ez azonban nem ilyen egyszerű, és történetesen éppen fordítva áll (l. 2.6. szakasz).



2.9. ábra. A kötegszintű áramkiszorítás (a) és közelségi hatás (b) szemléltetése.

kötegelés legalsó szintjén tipikusan sok szálát ($n_1 \gg 7$) fognak össze, ami lehetővé teszi a hagyományos értelemben vett homogenizálást is.

Sullivan és Zhang [103] például bevezeti a köteg σ_{eq} *egyenértékű* fajlagos vezetőképességét, amelyben figyelembe veszi a kitöltési tényezőt, valamint a sodrás okozta rövidülést (vö. 2.3. szakasz). Ezzel szemben Roßkopf és társai [87] részletesen elemzik az egyes szálak látszólagos pályáját a keresztmetszetben, és az alapján képeznek egyfajta átlagot. Akármelyik módszert is választjuk, a köteg ezek után tömör, homogén vezetőnek tekinthető, és a szkinhatásból eredő áramsűrűség-eloszlása az SLSE-hez hasonlóan, akár analitikusan is számítható (l. lentebb). Ezt reprezentálja a 2.8. diagram [BLSE*] számítási blokkja. Az egyes elemi szálak diszkrét árama a folytonosan eloszló áramsűrűség integráljaként rekonstruálható:

$$I_{0,k}^{se} \approx \int_{\Omega_{0,k}} J_z d\Omega, \quad k = 1, \dots, N_0 \quad (2.20)$$

Végül megjegyezzük, hogy a szálak n_1 számát, illetve a köteg r_1 sugarát a gyakorlatban általában úgy választják meg, hogy a BLSE még elhanyagolható legyen, melynek feltétele:

$$r_1 \lesssim \delta_{eq} \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_{eq}}}. \quad (2.21)$$

Ekkor a száláramok számítására a (2.19) egyszerű képlet használható $\lambda = 1$ helyettesítéssel.

Kötegszintű közelségi hatás (BLPE/BLPE*)

Egy köteg alkötegei, ill. vezetőszáalai a huzal két végén rövidre vannak zárva, ezért páronként hurkot alkotnak. Ezekben a hosszanti hurkokban a H^e váltakozó mágneses tér feszültséget indukál, amelynek hatására áram folyik [58] (lásd 2.9/b ábra). A huzal keresztmetszetében ezek az

oda-vissza folyó áramok antiszimmetrikus áramképet eredményeznek (vö. 2.6. ábra).

A BLPE áramkép meghatározásához tekintsük tehát az i -edik λ szintű köteget, és keressük az alkötegeinek, ill. szálainak azon $I_{\lambda-1,k}^{\text{pe}}, k = 1, \dots, n_\lambda$ áramait, amelyeket a \mathbf{H}_λ^e külső tér indukál, és amelyek algebrai összege a fentiek értelmében zérus:

$$\sum_{k=1}^{n_\lambda} I_{\lambda-1,k}^{\text{pe}} = 0. \quad (2.22)$$

Itt ugyanazt az idealizált kötegeometriát vesszük alapul, mint a BLSE esetében (l. fentebb), ám a megoldandó MQS probléma gerjesztése éppen annak komplementere. A (2.2)-(2.5) egyenleteket $\lambda > 1$ esetén itt is ki kell egészíteni a (2.18) homogenitási kényszerrel.

A BLPE olyan általános 3D térszámítási problémára vezet, amely – a BLSE-vel ellentétben – sajnos nem redukálható 2D síkproblémára, sőt még az utóbbinál említett periodikus peremfeltételek sem alkalmazhatók, mivel a BLPE áramait a \mathbf{H}_λ^e gerjesztés a huzal teljes hossza mentén befolyásolja. Megemlíjtük, hogy speciálisan szimpla kötegű huzalokra hatékony integrálegyenletes [60], illetve PEEC alapú [88] számítási módszereket dolgoztak ki, amelyek esetleg alkalmazhatók egy összetettebb kötegrendű huzal legalsó, $\lambda = 1$ szintjén (BLPE*).

Ugyanakkor szerencsére pont a BLPE az a hatás, amely a huzal sodrásával a legkönnyebben kiiktatható. A 2.9/b ábra azt is megmutatja, hogy a szálak, ill. kötegek folyamatos helycseréje miatt a \mathbf{H}^e külső tér hol pozitív, hol negatív előjellel járul hozzá a hurok fluxusához, amelynek ily módon a *várható értéke* zérus [58]. Az attól való „statisztikai” eltérést két dolog okozhatja:

- A csavart kötegnek *nem egész* számú fordulata esik a huzal hosszára: $l \neq m p_\lambda, m \in \mathbb{N}$. Ez elhanyagolható, ha a huzal viszonylag hosszú: $l \gg p_\lambda$.
- Maga a \mathbf{H}^e mágneses tér is változik a huzal mentén. Ennek hatása akkor hanyagolható el, ha a változás „elég lassú” a sodráshoz képest [103]; képlettel kifejezve:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{H}^e}{\partial \zeta} \right| p_\lambda \ll |\mathbf{H}^e|. \quad (2.23)$$

Homogenizálás fiktív komplex permeabilitással

A szorosan összefogott huzalkötegeket, valamint a sűrűn csévélt tekercseket a közelségi hatásokból eredő veszteség szempontjából gyakran helyettesítik fiktív homogén, nem vezető, de veszteséges (hiszterézises) mágneses közeggel, amelyet a $\langle \hat{\mu}_r \rangle$ komplex relatív permeabilitással jellemeznek. A helyettesítés alapját az elemi szálakban létrejövő kicsiny köráramok diamágneses hatása és Joule-vesztesége képezi (vö. 2.7. ábra); a homogenizált komplex permeabilitás ezek átlagolt hatását írja le [76].

A homogenizálásra léteznek analitikus és numerikus módszerek egyaránt. Az előbbieknél az önmagában álló vezetősál terének ismert formuláját kombinálják valamilyen *keverési törvénnyel*. Igarashi és Hiruma [58, 60] például hengeres vezetősálból álló szimpla kötegű litze

huzalt vizsgál, és az Ollendorff-féle formulát [78] alkalmazza:¹¹

$$\langle \dot{\mu}_r \rangle = 1 + \frac{2\chi \left(\mu_r \frac{\mathcal{J}_1(\gamma)}{\gamma \mathcal{J}_1'(\gamma)} - 1 \right)}{2 + (1 - \chi) \left(\mu_r \frac{\mathcal{J}_1(\gamma)}{\gamma \mathcal{J}_1'(\gamma)} - 1 \right)}, \quad \gamma = (-1 + j) \frac{r_0}{\delta}. \quad (2.24)$$

A képletben r_0 az elemi vezetősál sugara, μ_r a szál anyagának relatív permeabilitása (általában $\mu_r \approx 1$), δ a (2.9) behatolási mélység, χ a köteg kitöltési tényezője, végül \mathcal{J}_1 az elsőfajú, elsőrendű Bessel-függvény, \mathcal{J}_1' pedig annak deriváltja. A szerzők azt is kimutatták, hogy a huzal sodrásának befolyása $\langle \dot{\mu}_r \rangle$ értékére elhanyagolható [58].

A numerikus módszerek (pl. FEM) alkalmazásánál a huzalkeresztmetszetet szabályos, *periodikus* struktúrával közelítik, és a számítást annak egy *szimmetriacellájára* végzik el [53, 69, 85]. Figyelemre méltó, hogy Gyselinck és Dular [53] az említett számítást a külső tér két merőleges irányára elvégezve egy homogenizált permeabilitás-*tenzort* határoz meg, amellyel a tekercselés (nagyobb léptékkal nézve) anizotrop viselkedését is képes figyelembe venni. Az általunk vizsgált huzalok esetében erre többnyire nincs szükség.

A $\langle \dot{\mu}_r \rangle$ ekvivalens komplex permeabilitással a szóban forgó veszteségkomponens a (2.7)-hez hasonlóan így számolható:

$$P_{\text{pe}} = \frac{\omega}{2} \int_V \mu_0 \text{Im} \{ \langle \dot{\mu}_r \rangle \} \mathbf{H}_1^e \cdot (\mathbf{H}_1^e)^* dv. \quad (2.25)$$

Ne feledjük, hogy bár a számítás kötegszinten történik (vö. 2.8. ábra), maga a veszteség egy szál-szintű jelenségből fakad. Ugyancsak fontos megjegyezni, hogy ez a fajta homogenizálás a kötegelés $\lambda > 1$ szintjein nem alkalmazható, mivel \mathbf{H}^e és az általa indukált köráramok kapcsolata *nem lokális* (lásd az előző alpontban).

2.5.3. Kis léptékű modell: az elemi vezetősál

Amint már említettük, erre a legrészletesebb modellre nincs mindig szükség: például P_{se} többnyire elhanyagolható, P_{pe} pedig egy szinttel feljebb, a (2.24) homogenizált komplex permeabilitással is számítható (vö. 2.8. ábra). Ha mégis alkalmaznunk kell, akkor kiindulásként ismertnek tekinthetjük egyrészt az elemi szálak $I_{0,k}$, $k = 1, \dots, N_0$ áramait, másrészt a \mathbf{H}_0^e mágneses teret, amelyek a közepes léptékű modell kimenetei (lásd 2.5.2. szakasz). Ezekkel elvileg meghatározható a szálak árameloszlása, majd abból (2.7) alapján a veszteség. Azonban egyszerű alakú (pl. kör keresztmetszetű) vezető Joule-vesztesége analitikus formulákkal, közvetlenül számítható, és az alábbiakban mi is csupán erre az esetre szorítkozunk.

¹¹ Azonban az [58] cikkben megjelentetett formula két hibát is tartalmaz.

A veszteség frekvenciafüggetlen része

A veszteségen belül elhatárolható egy olyan összetevő, amely független a frekvenciától (l. 2.7. szakasz). Mivel értelemszerűen $f \rightarrow 0$ esetén is fellépne, ezért szokás még „egyenáramú” (DC) összetevőnek nevezni. Amint a következő alpontban látjuk, az áramkiszorításból eredő veszteséget általában ehhez viszonyítva adják meg, ezért érdemes külön kifejezni. Tekintsük a k -adik vezetősál egyenáramú ellenállását:

$$R_{0,k} = \frac{l\alpha_{(k)}}{\sigma r_0^2 \pi}, \quad (2.26)$$

amelyben az $\alpha \geq 1$ rövidülési faktoral (2.3. szakasz) vesszük figyelembe, hogy a sodrás miatt az egyes szálak valamivel hosszabbak a huzalnál. A több szinten kötegetelt és megsodort huzalnál a rövidülési faktorok szorozódnak, azaz $\alpha = \prod_{\lambda=1}^{\Lambda} \alpha_{\lambda}$. Innen a huzal DC vesztesége:

$$P_{dc} = \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{2} R_{0,k} |I_{0,k}|^2. \quad (2.27)$$

Áramkiszorítás az elemi szálban (SLSE)

Egy vezetősálnak az áramkiszorítással terhelt, ún. nagyfrekvenciás ellenállását az egyenáramú ellenállásához viszonyítva célszerű megadni. Tömör, hengeres vezetőre (lásd pl. [37, 38, 107]) így írható:

$$R_{se} = G_{se}(f) \cdot R_0, \quad G_{se} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\mathcal{J}_0(\gamma)}{\mathcal{J}_1(\gamma)} \right\}, \quad (2.28)$$

ahol R_0 az egyenáramú ellenállás, és $G_{se} \geq 1$ az áramkiszorítási tényező. Amint a képletben kiemeltük, G_{se} frekvenciafüggő, ugyanis $\gamma = (-1 + j)r_0/\delta$, ahol $\delta = (\pi f \mu \sigma)^{-1/2}$. Az áramkiszorításból eredő *többléveszteséget* tehát (2.27) nyomán így számíthatjuk:

$$P_{se} = \sum_{k=1}^{N_0} \frac{1}{2} (1 - G_{se}) R_{0,k} |I_{0,k}|^2. \quad (2.29)$$

E veszteségkomponens szempontjából meghatározó a szálsugár és a behatolási mélység aránya: például $r_0/\delta < 1,55$ esetén a relatív többléveszteség 10 % alatti, míg $r_0/\delta < 0,85$ esetén már az 1 %-ot sem éri el, azaz elhanyagolható.

Közelségi hatás az elemi szálban (SLPE)

A homogén, szinuszos időfüggésű H^e mágneses térbe helyezett vezeték örvényáram-vesztesége általánosan a mágneses térerősség négyzetével nő, és egy frekvenciafüggő G_{pe} viszonysszámmal jellemezhető. Kör keresztmetszetű, tömör vezetékre, amennyiben a mágneses tér tisztán alter-

náló és iránya merőleges a vezeték hossz tengelyére, G_{pe} képlete a következő [39]:¹²

$$G_{pe} = -\frac{2\pi|\gamma|}{\sigma} \cdot \frac{\text{ber}_2|\gamma| \cdot \text{ber}'_1|\gamma| + \text{bei}_2|\gamma| \cdot \text{bei}'_1|\gamma|}{\text{ber}_1^2|\gamma| + \text{bei}_1^2|\gamma|}. \quad (2.30)$$

A képletben a ber_n és bei_n Kelvin-függvények valamint deriváltjaik szerepelnek. Ezek visszavezethetők a már felhasznált Bessel-függvényekre, és a teljesség kedvéért megadjuk a vonatkozó összefüggéseket [77] alapján:

$$\mathcal{J}_n\left(x \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi}\right) = \text{ber}_n x + j \text{bei}_n x, \quad (2.31)$$

$$\sqrt{2} \text{ber}'_1 x = \text{ber}_1 x + \text{bei}_1 x, \quad (2.32)$$

$$\sqrt{2} \text{bei}'_1 x = -\text{ber}_1 x + \text{bei}_1 x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

A veszteség számításánál kihasználjuk, hogy a \mathbf{H}_0^e kollektív eredő mágneses tér (2.5.2. szakasz) bármely vezető szál keresztmetszetében közelítőleg homogén, ezért a k -adik szál ζ keresztmetszetében egyetlen $\mathbf{H}_{0,k}^e(\zeta)$ értékkel jellemezhető. A veszteségi teljesítmény képlete így

$$P_{pe} = \sum_{k=1}^{N_0} \int_0^l G_{pe} \left| \mathbf{H}_{0,k}^e(\zeta) \right|^2 d\zeta. \quad (2.34)$$

Bár a P_{se} -hez hasonlóan ennél a veszteségkomponensnél is fontos szerepet játszik az r_0/δ arány, P_{pe} számottevő vagy elhanyagolható volta mégsem dönthető el csupán ez alapján. Mivel a viszonyítási alap a dc ellenállás, e döntéshez csak akkor kapunk támpontot, ha a P_{pe} teljesítményt a $H \sim I$ arányosság révén ellenállássá konvertáljuk (l. 2.7. szakasz).

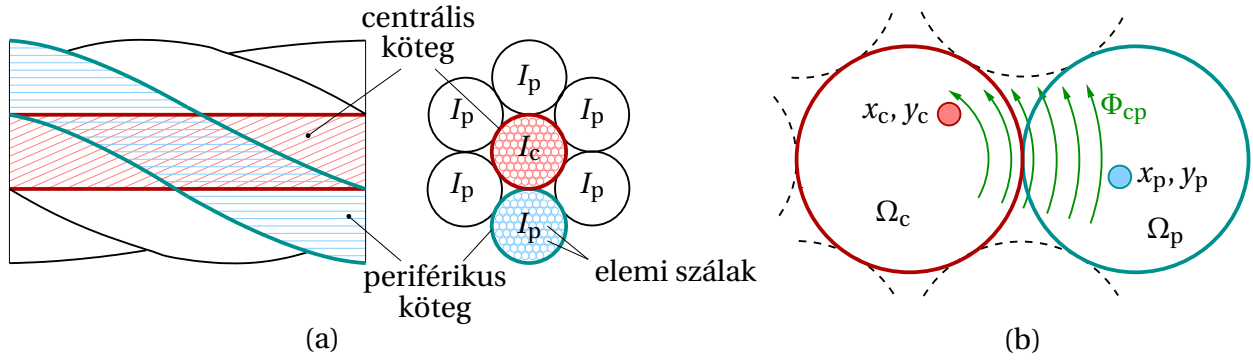
A számítás nagy mértékben egyszerűsíthető, ha vannak olyan $\Delta\zeta_i$ szakaszok, amelyek mentén a mágneses tér \mathbf{H}^{ind} indirekt összetevője állandónak vehető (vagy éppenséggel elhanyagolható), és amelyek ugyanakkor elegendően hosszúak ahhoz, hogy az elemi szálak a keresztmetszet minden tartományát statisztikailag egyenletesen bejárják. Ekkor a veszteség szakaszonként, a mágneses térerősség négyzetes középértékével számítható, ahol az utóbbit a szakaszon belül egy tetszőleges ζ_i keresztmetszeten képezhetjük:¹³

$$P_{pe} \approx \sum_i G_{pe} \langle H \rangle_i^2 \Delta\zeta_i, \quad \langle H \rangle_i = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \left| \mathbf{H}_{0,k}^e(\zeta_i) \right|^2}. \quad (2.35)$$

Ha a mágneses mező forgó összetevőt is tartalmaz, akkor az ún. ellipticitással jellemezhető (bővebben a 2.8. szakaszban). Az ilyen azonban mindig felbontható két, egymásra merőleges irányú, tisztán alternáló mezőre, a veszteség pedig e két komponensre – az imént ismertetett módon – külön-külön számítható, és összegeezhető. Minderre a 2.7. szakaszban ismertetett ortogonalitási tulajdonság ad alapot.

¹² Sajnos Ferreira későbbi [37, 38] cikkeiben ez a képlet hibásan szerepel, amelyet a hivatkozó szerzők némelyike is átvett.

¹³ Hasonló eljárást vázol [102], ám nem fejt ki részletesen.



2.10. ábra. (a) A kötegek közötti áramkiszorítás alapesete. (b) Az indukciótörvény jelölései.

2.6. A kötegek közötti áramkiszorítás homogenizált modellje

A kötegek közötti áramkiszorítás (BLSE) szimulációjával eddig kevesen foglalkoztak, a közölt modellek pedig erősen közelítő jellegűek [103]. Ráadásul e modellek verifikációját nehezíti, hogy a BLSE nehezen mérhető önmagában, azaz nehezen különíthető el a többi veszteségkomponenstől, ennek megfelelően igen kevés mérési adat lelhető fel a szakirodalomban [90, 103].

Munkánk során olyan új modellt fejlesztettünk ki a BLSE leírására, amely kis erőforrásigényű, rugalmasan illeszthető a különböző huzalkonstrukciókhoz, továbbá lehetővé teszi a tervezést segítő aszimptotikus paraméterek meghatározását [47]. Ebben a szakaszban a modell elméleti leírását adjuk meg, míg a 2.8. szakaszban egy gyakorlati példával szemléltetjük azt. A modell alkalmazhatóságát mérések igazolják.

2.6.1. Az árammegoszlás számítása

A szóban forgó modellt a 2.8. diagram [BLSE] blokkja reprezentálja, amely elvileg a közepes léptékű huzalmodell (2.5.2. szakasz) minden egyes szintjén megjelenik. A jelölések egyszerűsítése végett vizsgálatainkat egy tetszőleges, rögzített λ szintre korlátozzuk, azaz ismertnek tekintjük egy λ szintű köteg $I \equiv I_{\lambda,m}$ összáramát, és keressük annak megoszlását az $n \equiv n_\lambda$ számú alkötege között. Az általunk vizsgált *alapesetben* az alkötegek egyike *centrális*, azaz végig a főköteg középvonalában halad; a többi, *periférikus* alköteg csavart pályája pedig egyforma, ennél fogva elektromágneses szempontból ekvivalensek és áramuk megegyezik (2.10/a. ábra). Feladatunk így véső soron az I_c és I_p áramok meghatározására redukálódik, amelyekre

$$I = I_c + (n - 1)I_p \quad (2.36)$$

teljesül. A módszer természetesen adaptálható ennél általánosabb esetre is.

Az alkötegekre nézve feltesszük, hogy azok igen nagy $N \equiv N_0$ számú, sűrűn elhelyezett elemi szálból állnak, valamint elegendően hosszúak ahhoz, hogy a szálak az alköteg-keresztmetszetet „statisztikailag bejárják”. Ebből ugyanis következik, hogy a szálak egy-egy alkötegen belül

ekvivalensek, vagyis azonos, I_c/N , ill. I_p/N áramot vezetnek.¹⁴ Ugyanakkor *nem* kötjük ki a szálak *egyenletes* eloszlását a keresztmetszetben (lásd alább).

Válasszunk ki két tetszőleges elemi vezetőszálat, egyet a centrális kötegből, egyet pedig valamelyik perifériusból (2.10/b. ábra). Mivel a huzal két végén a szálak érintkezésbe lépnek, ezért zárt hurkot alkotnak. Írjuk fel a Faraday-féle indukciótörvényt erre a hurokra:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \equiv \frac{I_c}{Nr_0^2\pi\sigma} \alpha_c l - \frac{I_p}{Nr_0^2\pi\sigma} \alpha_p l = -j\omega\Phi_{cp}, \quad (2.37)$$

ahol Φ_{cp} a hurok által körülzárt mágneses fluxus komplex amplitúdója. Feltűnhet, hogy az egyenlet bal oldala ebben az alakban csak akkor érvényes, ha a szálak árameloszlása egyenletes, ami nyilvánvalóan nem igaz, ha SLSE vagy SLPE fellép. Itt azonban nincs ellentmondás: a BLSE modellje közepes léptékű, ahol ez a közelítés (átlagolás) megengedett; a szálak pontos árameloszlását ugyanis csak alacsonyabb szinten, a kis léptékű, avagy mikroszkopikus modell keretében vizsgáljuk. A továbbiakban (2.37) alábbi, tömörebb alakját használjuk:

$$I_c R'_c l - I_p R'_p l = -j\omega\Phi_{cp}, \quad (2.38)$$

amelyben R'_c és R'_p a megfelelő alkötegek hosszegységre vonatkoztatott DC ellenállásának tekinthető.¹⁵

A hurokfluxus meghatározása távolról sem egyszerű. Bár ehhez az adott szinten rendelkezésre áll a mágneses tér direkt összetevőjének $\mathbf{H}_{\lambda+1}^{\text{dir}}$ közelítése (az indirekt összetevő a BLSE szempontjából nem játszik szerepet, vö. 2.8. ábra), azonban a szálak a huzal mentén többszörösen összetett csavarvonalpályát követnek, így az általuk kifeszített felület is igen bonyolult. A számítás valamelyest egyszerűsíthető az \mathbf{A} mágneses vektorpotenciál bevezetésével:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \text{és} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.39)$$

ahol az ún. Coulomb-mértéket használtuk. A fluxus ugyanis megegyezik a vektorpotenciálnak a felület kontúrjára vett integráljával, más néven cirkulációjával [98]. A huzal geometriájára (2.3. szakasz) vonatkozó feltevéseink alapján élhetünk azzal a közelítéssel, hogy az integrálban a vektorpotenciál ζ irányú komponensét vesszük:

$$\begin{aligned} \Phi_{cp} &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \approx \int_0^l A_\zeta(x_c(\zeta), y_c(\zeta)) d\zeta + \int_l^0 A_\zeta(x_p(\zeta), y_p(\zeta)) d\zeta \\ &= \int_0^l [A_\zeta(x_c(\zeta), y_c(\zeta)) - A_\zeta(x_p(\zeta), y_p(\zeta))] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sajnos általában nem ismerjük a szálak keresztmetszeti pozícióját leíró $x_c(\zeta)$, $y_c(\zeta)$, $x_p(\zeta)$, és

¹⁴ Ha a struktúra a $\lambda - 1$ szinten további alkötegekre bomlik, az abból adódó esetleges áramátrendeződést az eggyel alacsonyabb szintű BLSE blokkban vehetjük figyelembe (vö. 2.8. ábra).

¹⁵ A felső vesszővel ellátott szimbólum (amennyiben nem deriváltat jelöl) hallgatólagosan egy – általában tér-fogathoz rendelt – fizikai mennyiség differenciális, hosszegységre vetített megfelelőjét jelöli, és dimenziója $[\text{hossz}]^{-1}$ szorzóval módosul.

$y_p(\zeta)$ függvényeket, vagy ha mégis (lásd pl. [87, 102]), azok túlságosan bonyolultak a (2.40) integrál hatékony kiértékeléséhez.

Az új módszer egyik alapötlete, hogy a szálpozíciók koordinátáit *valószínűségi változónak* tekintjük, és azok együttes eloszlását egy $w_{cp}(x_c, y_c, x_p, y_p)$ sűrűségfüggvénnyel adjuk meg, amely jellemző az adott huzalkonstrukszióra (egy példát a 2.8. szakaszban láthatunk). Ezzel ugyanis a (2.40) integrál középértéke – amely nem más, mint a hosszegységre eső átlagos fluxus, $\hat{\Phi}'$ – *várható értéként* értelmezhető:

$$\Phi_{cp} = l\hat{\Phi}' \approx l\mathbb{E}[A_\zeta(x_c, y_c) - A_\zeta(x_p, y_p)] \quad (2.41)$$

$$= l \iiint_{\Omega_c \times \Omega_p} w_{cp}(x_c, y_c, x_p, y_p) \cdot [A_\zeta(x_c, y_c) - A_\zeta(x_p, y_p)] dx_c dy_c dx_p dy_p. \quad (2.42)$$

Az egyszerűség kedvéért (illetve pontosabb információ hiányában) feltesszük, hogy a két választott szál keresztmetszeti pozíciója kvázi *független* egymástól, ennél fogva a w_{cp} együttes sűrűségfüggvény szorzatra bontható:

$$w_{cp}(x_c, y_c, x_p, y_p) = w_c(x_c, y_c) \cdot w_p(x_p, y_p), \quad (2.43)$$

ahol w_c és w_p a két választott szál pozíciójának peremsűrűség-függvénye. Helyettesítsük be w_{cp} (2.43) felbontott alakját a (2.42) integrálba, és egyszerűsítsük a jelölést: legyen $A_c \equiv A_\zeta(x_c, y_c)$, ill. $A_p \equiv A_\zeta(x_p, y_p)$, továbbá $\iiint_{\Omega_c \times \Omega_p} dx_c dy_c dx_p dy_p \equiv \iint_{\Omega_c \times \Omega_p} d\Omega_c d\Omega_p$. Ezzel

$$\hat{\Phi}' = \iint_{\Omega_c \times \Omega_p} w_c w_p (A_c - A_p) d\Omega_c d\Omega_p \quad (2.44)$$

$$= \int_{\Omega_p} w_p \int_{\Omega_c} w_c A_c d\Omega_c d\Omega_p - \int_{\Omega_c} w_c \int_{\Omega_p} w_p A_p d\Omega_p d\Omega_c \quad (2.45)$$

$$\equiv \langle A \rangle_c \int_{\Omega_p} w_p d\Omega_p - \langle A \rangle_p \int_{\Omega_c} w_c d\Omega_c \quad (2.46)$$

$$= \langle A \rangle_c - \langle A \rangle_p \equiv \Delta A. \quad (2.47)$$

A (2.45) felbontásnál kihasználtuk, hogy az egyes függvények tartói, $\text{supp}(w_c) = \text{supp}(A_c) = \Omega_c$, ill. $\text{supp}(w_p) = \text{supp}(A_p) = \Omega_p$ diszjunkt tartományok. A (2.46) lépésben új jelölést vezettünk be: egy Ω -n értelmezett u skalárfüggvény adott kötegre vett, súlyozott átlaga

$$\langle u \rangle_c = \int_{\Omega_c} w_c u d\Omega, \quad \text{ill.} \quad \langle u \rangle_p = \int_{\Omega_p} w_p u d\Omega. \quad (2.48)$$

A (2.47) lépésben pedig figyelembe vettük a valószínűségi sűrűségfüggvények ismert normatlajdonságát: $\int_{\Omega_{c,p}} w_{c,p} d\Omega = 1$. Végül arra az elegáns eredményre jutottunk, hogy a fluxus kifejezhető az A_ζ vektorpotenciál-komponens keresztmetszeti „kötegtálagainak” különbségeként (ezt a speciális különbségképzést a Δ operátorral jelöljük).

Az \mathbf{A} vektorpotenciál a huzal tetszőleges ζ keresztmetszetében definiált 2D *síkproblémával* határozható meg, ahol $\mathbf{J} \approx J_z \mathbf{e}_z$ valamint (2.39) miatt $\mathbf{A} = A(x, y) \mathbf{e}_z$ vehető, és természetesen

$A \equiv A_\zeta$. Mivel ezen a szinten az SLSE és SLPE örvényáram-jelenségeket nem modellezzük, ezért a mágneses tér *stacionárius* modelljével dolgozhatunk [98]:

$$\nabla_\tau \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla_\tau A \right) = -J, \quad \text{ahol} \quad \nabla_\tau = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.49)$$

További egyszerűsítésként – a homogenizálás szellemében – felhasználhatjuk a már bevezetett w sűrűségfüggvényeket az árameloszlás kifejezésére az egyes kötegekben:

$$J_c(x, y) = I_c w_c(x, y), \quad \text{ill.} \quad J_p(x, y) = I_p w_p(x, y), \quad (2.50)$$

amely által elkerülhető a huzalkeresztmetszet részletes, szálszintű diszkretizálása. Ha vége-selem módszert használunk, akkor az Ω modelltartományt le kell zárunk egy ún. „távoli” pe-remmel, de ez már technikai kérdés. A lényeg, hogy a (2.47) statisztikai kifejezésre alapozva a fluxus numerikus számításának erőforrásigénye igen csekély.

A következő lépés, hogy elkülönítjük a két áram, I_c és I_p hatását a mágneses térben. Ehhez tekintsük az alábbi két, *normált* vektorpotenciál-mezőt, a (2.49) PDE független bázismegoldá-sait, amelyeket például a vége-selem módszerrel állíthatunk elő:

$$\left. \begin{aligned} A^c &= \frac{A(x, y)}{I_c}, \quad \text{ha} \quad I_c \neq 0, I_p = 0 \\ A^p &= \frac{A(x, y)}{I_p}, \quad \text{ha} \quad I_c = 0, I_p \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (x, y) \in \Omega.^{16} \quad (2.51)$$

A linearitásból kifolyólag bármilyen kötegáram-eloszlásra az eredő vektorpotenciál az előbbiek szuperpozícióval képezhető:

$$A = A^c I_c + A^p I_p. \quad (2.52)$$

Helyettesítsük be ezt a (2.47) kifejezésbe, majd kihasználva a (2.48) operátorok linearitását, ren-dezzük át a tagokat:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}' &= \langle A^c I_c + A^p I_p \rangle_c - \langle A^c I_c + A^p I_p \rangle_p \\ &= \left[\langle A^c \rangle_c - \langle A^c \rangle_p \right] I_c + \left[\langle A^p \rangle_c - \langle A^p \rangle_p \right] I_p \\ &\equiv \Delta A^c I_c + \Delta A^p I_p, \end{aligned} \quad (2.53)$$

amelyben ismét szerephez jut a (2.47)-ben bevezetett Δ operátor. Térjünk most vissza a (2.38) indukciótörvényhez, és helyettesítsük be a fluxus (2.53) kifejezését:

$$I_c R_c' l - I_p R_p' l = -j\omega (\Delta A^c I_c + \Delta A^p I_p) l. \quad (2.54)$$

Ebből kifejezhetjük az áramok komplex értékű hányadosát, amelynek abszolút értékére és fá-

¹⁶ Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az A^p esetében az összes periférikus köteg I_p áramot vezet, valamint hogy A^c és A^p tartója egyaránt a teljes Ω tartomány.

zisszögére külön szimbólumot vezetünk be:

$$\frac{I_p}{I_c} = \frac{R'_c + j\omega\Delta A^c}{R'_p - j\omega\Delta A^p} \equiv K e^{j\rho}. \quad (2.55)$$

Végül, figyelembe véve a (2.36) áramkényszert, megkapjuk a keresett kötegáramokat:

$$I_c = \frac{I}{1 + (n-1)K e^{j\rho}}, \quad \text{és} \quad I_p = \frac{K e^{j\rho} I}{1 + (n-1)K e^{j\rho}}. \quad (2.56)$$

Az olvasóban felmerülhet a kérdés, vajon nem lehet-e tovább egyszerűsíteni a BLSE tárgyalását a statisztikai megközelítés mellőzésével és a (2.41)-(2.53) levezetés megtakarításával. Például oly módon, hogy a (2.38) indukciótörvényt a két alköteg *középvonalai* mentén haladó hurokra írjuk fel, vagyis a fluxus számítására (2.41) helyett – formálisan – a könnyebben kiértékelhető

$$\Phi_{cp} \approx l \left[A_\zeta(\mathbb{E}(x_c), \mathbb{E}(y_c)) - A_\zeta(\mathbb{E}(x_p), \mathbb{E}(y_p)) \right] \quad (2.57)$$

képletet használjuk. Azonban ez utóbbi közelítés a tapasztalat szerint jóval pontatlanabb eredményt ad [47].

2.6.2. Aszimptotikus viselkedés

Tekintsük a (2.55) kifejezést, de valamivel egyszerűbb alakban: a gyakorlatban elfogadható az $\alpha_c \approx \alpha_p$ közelítés, amelyből (2.37)-(2.38) szerint $R'_c \approx R'_p \approx R'$ következik. A komplex áramarány magnitúdója és fázisa a frekvencia függvényében tehát így írható:

$$K = \sqrt{\frac{(R')^2 + 4\pi^2 f^2 (\Delta A^c)^2}{(R')^2 + 4\pi^2 f^2 (\Delta A^p)^2}}, \quad \text{ill.} \quad \rho = \text{Arc Tan}(2\pi f \Delta A^c, R') - \text{Arc Tan}(2\pi f \Delta A^p, R'), \quad (2.58)$$

ahol $\text{Arc Tan}()$ a kétargumentumú arkusz-tangens függvény. Figyelembe vettük, hogy (2.49)-(2.51) alapján ΔA^c és ΔA^p szükségképpen valós. Innen a következő határértékek adódnak:

$$K_0 \equiv \lim_{f \rightarrow 0} K = 1, \quad K_\infty \equiv \lim_{f \rightarrow \infty} K = \left| \frac{\Delta A^c}{\Delta A^p} \right| \geq 1, \quad (2.59)$$

$$\rho_0 \equiv \lim_{f \rightarrow 0} \rho = 0, \quad \rho_\infty \equiv \lim_{f \rightarrow \infty} \rho = \begin{cases} -\pi, & \text{sgn } \Delta A^c = \text{sgn } \Delta A^p \\ 0, & \text{sgn } \Delta A^c \neq \text{sgn } \Delta A^p \end{cases} \quad (2.60)$$

Célszerű bevezetni még az f_0 karakterisztikus frekvenciát:

$$f_0 = \frac{R'}{2\pi |\Delta A^p|}, \quad (2.61)$$

ugyanis ezzel a (2.55) áramarány egyszerűbb alakban írható:

$$Ke^{j\rho} = \frac{f_0 + jf \frac{\Delta A^c}{|\Delta A^p|}}{f_0 - jf \frac{\Delta A^p}{|\Delta A^p|}} = \frac{1 + j \frac{f}{f_0} K_\infty \operatorname{sgn} \Delta A^c}{1 - j \frac{f}{f_0} \operatorname{sgn} \Delta A^p}. \quad (2.62)$$

Még szemléletesebb összefüggést kapunk, ha meghatározzuk azt az ellenállás-növekedést, amelyet a BLSE – vagyis az áram alkötegek közötti egyenlőtlen megoszlása – *önmagában* véve okozna. A hosszegységre eső veszteségi teljesítmény az áram *egyenletes*, illetve *egyenetlen* megoszlása esetén az alábbi módon fejezhető ki:

$$P'_0 = n \cdot \frac{1}{2} R' \left| \frac{I}{n} \right|^2, \quad \text{ill.} \quad P'_{\text{blse}} = \frac{1}{2} R' |I_c|^2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} R' |I_p|^2. \quad (2.63)$$

A kötegarámok (2.56) kifejezésével kettejük arányára

$$\frac{P'_{\text{blse}}}{P'_0} \equiv \frac{R_{\text{blse}}}{R_0} = n \cdot \frac{1 + (n-1) |Ke^{j\rho}|^2}{|1 + (n-1) Ke^{j\rho}|^2} \quad (2.64)$$

adódik. Végül ide behelyettesítve a (2.62) áramarányt, az ún. ellenállás-faktor frekvenciafüggésére az alábbi formulát kapjuk:

$$\boxed{\frac{R_{\text{blse}}}{R_0} = \frac{n^2 + n \cdot (f/f_0)^2 [K_\infty^2 (n-1) + 1]}{n^2 + (f/f_0)^2 [K_\infty (n-1) + \exp(j\rho_\infty)]^2}} \quad (2.65)$$

Az utóbbi lépésben felhasználtuk, hogy (2.60) szerint $\operatorname{sgn} \Delta A^c / \operatorname{sgn} \Delta A^p = -\exp(j\rho_\infty)$.

A (2.65) függvény *szigmoid* alakú (2.11. ábra), amelyet három paraméter jellemez: K_∞ , ρ_∞ és f_0 . Ha $f \ll f_0$, akkor a BLSE nem számottevő, azaz $R_{\text{blse}}/R_0 \approx 1$. Ha viszont $f \gg f_0$, akkor az ellenállás-faktor egy véges értékhez tart (szaturál):

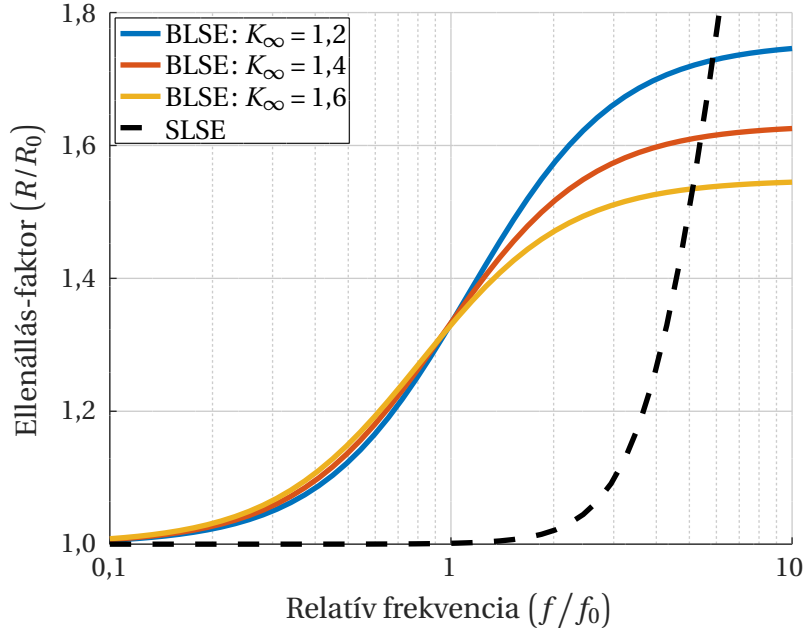
$$\lim_{f/f_0 \rightarrow \infty} \frac{R_{\text{blse}}}{R_0} = \frac{n [K_\infty^2 (n-1) + 1]}{[K_\infty (n-1) + \exp(j\rho_\infty)]^2} = \text{konst.} \quad (2.66)$$

A tapasztalat szerint „hagyományos” litze huzaloknál K_∞ értéke viszonylag alacsony (tipikusan $K_\infty < 2$), és $\rho_\infty = -\pi$.¹⁷ Utóbbi azt jelenti, hogy a középső alköteg árama a periférikus kötegekével éppen ellenkező irányú. Ennek két, némileg meglepő következménye van. Egyrészt (2.56) alapján nem csak $|I_p| > |I|/n$, de $|I_c| > |I|/n$ is igaz, vagyis az összes alköteg – a középsőt is beleértve – az átlagosnál nagyobb áramot vezet. Másrészt történetesen éppen a kisebb K_∞ aszimptotikus áramarányhoz tartozik a nagyobb ellenállás-faktor (vö. 2.11. ábra).

Az imént leírt viselkedés¹⁸ merőben eltér a tömör vezetőkben fellépő áramkiszorítástól, ahol a frekvencia növekedtével nullához tart az áramsűrűség a keresztmetszet belső tartományában,

¹⁷ A $\rho_\infty = 0$ eset csak különleges anyagok és geometria mellett jön létre, rendszerint magas K_∞ értékkel kísérve.

¹⁸ Egy kollégánk találóan „diszkrét áramkiszorításnak” nevezte el.



2.11. ábra. A BLSE hatására létrejövő ellenállás-faktor frekvenciafüggése, összehasonlítva a tömör vezetőnél fellépő SLSE megfelelő karakterisztikájával (f_0 mind a négy esetben azonos; a kötegelt vezetőkre $n = 7$ és $\rho_\infty = -\pi$)

az eredő ellenállás pedig minden határon túl nő. Hogy a kettőt jobban össze tudjuk hasonlítani, vegyük a G_{se} áramkiszorítási tényező (2.28) képletét, és alakítsuk át a relatív-frekvencia függvényévé. Ehhez az f_0 karakterisztikus frekvencia értéket úgy választjuk meg, hogy azon éppen $\delta = 2r_0$ teljesüljön. Ezzel az SLSE ellenállás-faktora (2.11. ábra, szaggatott vonal),

$$\frac{R_{slse}}{R_0} \equiv G_{se} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\mathcal{J}_0(\gamma)}{\mathcal{J}_1(\gamma)} \right\}, \quad \gamma = (-1 + j) \frac{r_0}{\delta} = \frac{-1 + j}{2} \sqrt{\frac{f}{f_0}}. \quad (2.67)$$

Az a csekély számú publikált mérési adat, amely *közvetlenül* utal a BLSE hatására, mindenestre alátámasztja a (2.65) karakterisztika helyességét, egyúttal az általam javasolt modell alkalmazhatóságát. Roßkopf [90] például két, azonos számú (420) szálát tartalmazó, de különbözőképpen kötegelt (60\7, ill. 30\14 kötegrendű) litze huzal ellenállás-faktorát hasonlítja össze; ehhez nem csupán mérést végez, de részletes (szálszintű) FEM-PEEC számítást is, amely ugyancsak alkalmas lehet egy homogenizált modell verifikálására. Az általa közölt diagramokon az ellenállás-faktorok különbségét ábrázolta, amelyeken jól látszik, hogy két szigmoid-függvényről van szó. A japán kollégáink által végzett mérések eredményét a 2.8. szakaszban mutatjuk be.

A szakirodalomban eddig publikált, homogenizált BLSE modellek ezzel szemben lényegében az SLSE karakterisztikáján alapulnak, amelyben a köteget egy ekvivalens vezetőképességgel jellemzett, tömör vezetőknek tekintik [102, 103]. Ezért talán nem meglepő, hogy Sullivan BLSE mérései jellegre sem egyeznek a számításaival [103]. Itt megemlítjük, hogy a (2.55) áramarány képlete is könnyedén átalakítható úgy, hogy abban megjelenjen az alkötég egyfajta ekvivalens vezetőképessége, illetve behatolási mélysége; az egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítko-

zunk, amikor az összes közeg permeabilitása azonos (μ):

$$\frac{I_p}{I_c} = \frac{\frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\delta_{eq}}{r_\lambda} \right)^2 + j\Delta A^c}{\frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\delta_{eq}}{r_\lambda} \right)^2 - j\Delta A^p}, \quad \delta_{eq} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_{eq}}}, \quad \sigma_{eq} = \frac{\chi}{\alpha} \sigma. \quad (2.68)$$

Ebben r_λ a λ szintű alköteg sugara, χ az eredő kitöltési tényező, α a szálak eredő rövidülési faktora az alkötegben, σ pedig a szál anyagának fajlagos vezetőképessége. Látható, hogy bár itt is megjelenik a behatolási mélység és a sugár aránya – akárcsak az SLSE-ben – de egészen más összefüggésben.

A jelenség leírásán túl a modell a tervezést is segíti; aszimptotikus jellemzői irányadók lehetnek a huzalstruktúra kialakításánál. Érdekes, hogy a szálak vezetőképessége csak az f_0 frekvenciát befolyásolja, K_∞ és ρ_∞ értéket nem, azonban ha a huzalban μ_0 -tól eltérő permeabilitású anyagot is használnak, az mindhárom paraméterre kihat. Általában nem gazdaságos a huzalt az $f \ll f_0$ tartományban használni, tehát a BLSE nem kerülhető el, legfeljebb a centrális köteg kiiktatásával. Azonban az a tény, hogy az $f \gg f_0$ tartományon az alkötegek impedanciájának kiegyensúlyozatlansága ismert módon állandósul, elvileg felhasználható például olyan speciális csatlakozók tervezésére [87], amelyek az impedanciakülönbséget kompenzálják, és így megakadályozzák a BLSE létrejöttét.

2.7. Ortogonalitás, a veszteség összetevőkre bontása

A különböző örvényáram-összetevők ún. teljesítmény-ortogonalitásával több cikk foglalkozik, azonban csupán a szálszintű jelenségekre szorítkozva [37, 38]. Néhány másik cikk ezt az ortogonalitást hallgatólagosan kiterjeszti a kötegszintű jelenségekre is, de bizonyítás nélkül [101, 102]. Jelen szakasz célja, hogy ezt az ortogonalitási kérdést tisztázza és matematikai formába öntse. Ennek nem csupán elvi jelentősége van, de a tervezést is nagy mértékben segíti, ha tudjuk, pontosan miből tevődik össze a huzal vesztesége, illetve hogyan csökkenthető. Az alábbiak megértését segíti a 2.8. blokkdiagram, illetve szemléletesebbé teszik a 2.6. ábra áramképei.

A teljesítmények felbontásához először a huzal *keresztmetszeti áramképét* bontjuk fel. Itt emlékeztetünk arra, hogy az SLPE kivételével (vö. 2.7. ábra) bármelyik áramösszetevő keresztmetszeti eloszlása lényegében változatlan a huzal teljes hosszán, ezért tetszőleges ζ keresztmetszet választható. Először is bevezetjük a huzal átlagos (komplex) áramsűrűségét:

$$J^{\text{avg}}(x, y) = \frac{I}{|\Omega_\Lambda|}, \quad (x, y) \in \Omega_\Lambda. \quad (2.69)$$

Továbbá a kötegelés $\lambda > 0$ szintjein olyan árameloszlásokat definiálunk, amelyek a $\lambda - 1$ szintű

alkötegekben állandók; ezeket az $I_{\lambda-1,k}^{\text{se}}$ és $I_{\lambda-1,k}^{\text{pe}}$ áramokból származtatjuk (vö. 2.6. ábra):

$$\left. \begin{aligned} J_{\lambda}^{\text{se}}(x, y) &= \frac{I_{\lambda-1,k}^{\text{se}}}{|\Omega_{\lambda-1}|} - J_{\lambda+1}^{\text{se}}(x, y) \\ J_{\lambda}^{\text{pe}}(x, y) &= \frac{I_{\lambda-1,k}^{\text{pe}}}{|\Omega_{\lambda-1}|} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(x, y) \in \Omega_{\lambda-1,k} \\ &k = 1, \dots, N_{\lambda-1} \\ &\lambda = 1, \dots, \Lambda \end{aligned} \quad (2.70)$$

Ezek közül J_{λ}^{se} a BLSE, míg J_{λ}^{pe} a BLPE árameloszlást reprezentálja. Azonban az előbbi esetében a megfelelő kötegáram átlagából rendre levonjuk az eggyel magasabb szintű BLSE áramsűrűséget annak érdekében, hogy egy a teljes keresztmetszetre nézve *nulla átlagú* eloszlást kapjunk (a képletet a $J_{\Lambda+1}^{\text{se}} \equiv J^{\text{avg}}$ értelmezés teszi teljessé). Ne feledjük ugyanis, hogy míg az egyes kötegszintek BLPE áramképei függetlenek egymástól (és nulla átlagúak), addig a BLSE I_{λ}^{se} kötegáramait a magasabb szintű áramkép újraparticionálásával kaptuk (lásd 2.6. szakasz), azaz magukban foglalják az összáramot. Hasonló eloszlásokat definiálunk a szálak szintjén is:

$$\left. \begin{aligned} J_0^{\text{se}}(x, y) &= J_k^{\text{slse}}(x, y) - J_{1,k}^{\text{se}}(x, y) \\ J_0^{\text{pe}}(x, y) &\equiv J_k^{\text{slpe}}(x, y) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(x, y) \in \Omega_{0,k} \\ &k = 1, \dots, N_0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Az ebben szereplő $J_k^{\text{slse}}(x, y)$ és $J_k^{\text{slpe}}(x, y)$ függvényeket a 2.5. ábra illusztrálja. A huzaláram keresztet felbontása tehát végső soron a következő:

$$J(x, y) = J^{\text{avg}} + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} J_{\lambda}^{\text{se}}(x, y) + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} J_{\lambda}^{\text{pe}}(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_{\Lambda}. \quad (2.72)$$

Ha a huzal nem tartalmaz ferromágneses anyagot, akkor a (2.10)-ben szereplő P_{litz} tag csak a „rézvesztésből” áll; hosszegységre vetített értékének kifejezése:

$$P'_{\text{litz}} = \frac{1}{2\sigma} \int_{\Omega_{\Lambda}} J J^* d\Omega, \quad (2.73)$$

ahol az egyszerűség kedvéért a teljes huzalban azonos fajlagos vezetőképességet feltételeztünk. A (2.72) felbontás behelyettesítésével az integrál összesen $4\Lambda^2 + 12\Lambda + 9$ tagra esik szét, szerencsére azonban a legtöbb közülük nulla. Tekintsük ugyanis a következő összefüggéseket:

$$J^{\text{avg}} = \text{konst.} \quad \text{és} \quad \int_{\Omega_{\lambda,k}} J^{\text{avg}} d\Omega = \frac{I}{N_{\lambda}}, \quad \forall \lambda, k \quad (2.74)$$

$$J_{\lambda}^{\text{se}} \Big|_{\Omega_{\nu,k}} = \text{konst.} \quad \text{és} \quad J_{\lambda}^{\text{pe}} \Big|_{\Omega_{\nu,k}} = \text{konst.}, \quad \forall \lambda, \nu < \lambda, k \quad (2.75)$$

$$\int_{\Omega_{\nu,k}} J_{\lambda}^{\text{se}} d\Omega = 0 \quad \text{és} \quad \int_{\Omega_{\nu,k}} J_{\lambda}^{\text{pe}} d\Omega = 0, \quad \forall \lambda, \nu \geq \lambda, k \quad (2.76)$$

$$J_{\lambda}^{\text{se}} \Big|_{\Omega_{\lambda,k}} \text{ „páros”} \quad \text{és} \quad J_{\lambda}^{\text{pe}} \Big|_{\Omega_{\lambda,k}} \text{ „páratlan”} \quad \forall \lambda, k. \quad (2.77)$$

Az első három a (2.69)-(2.71) definíciók alapján magától értetődő, a (2.77) paritási tulajdonsá-

gokról pedig már volt szó a 2.4. szakaszban. Vegyünk három, az Ω_λ tartományon értelmezett komplex skalárfüggvényt: J_c ($c = \text{constant}$) legyen állandó, J_e ($e = \text{even}$) az Ω_λ valamely szimmetriatengelyére nézve páros és nulla középvértékű, J_o ($o = \text{odd}$) pedig *ugyanarra* a tengelyre nézve páratlan függvény. Vegyük észre, hogy a (2.72) áramsűrűség-komponensek mindegyike reprezentálható e függvények valamelyikével, továbbá hogy a konjugálás ezeket a tulajdonságokat megőrzi. Az alábbi összefüggések nyilvánvalóan teljesülnek:

$$\int_{\Omega_\lambda} J_c J_e^* d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega_\lambda} J_c J_o^* d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega_\lambda} J_e J_o^* d\Omega = 0. \quad (2.78)$$

Utóbbihoz magyarázatul annyit, hogy $J_e J_o^*$ páratlan függvény. Végül felhasználjuk még, hogy a keresztmetszetre vonatkozó integrál – természetesen – kötegekre bontva is elvégezhető:

$$\int_{\Omega_\Lambda} u(x, y) d\Omega \equiv \sum_{k=1}^{N_\Lambda} \int_{\Omega_\lambda} u(x, y) d\Omega, \quad \forall \lambda. \quad (2.79)$$

A (2.73) teljesítményképletben szereplő integrál (2.72) behelyettesítésével így bontható fel:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\Lambda} J J^* d\Omega &= \int_{\Omega_\Lambda} J^{\text{avg}} (J^{\text{avg}})^* d\Omega \\ &+ 2\text{Re} \left\{ J^{\text{avg}} \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} (J_\lambda^{\text{se}})^* d\Omega \right\} + 2\text{Re} \left\{ J^{\text{avg}} \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} (J_\lambda^{\text{pe}})^* d\Omega \right\} \\ &+ 2\text{Re} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{v=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} (J_\lambda^{\text{se}}) (J_v^{\text{pe}})^* d\Omega \right\} \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{v=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} (J_\lambda^{\text{se}}) (J_v^{\text{se}})^* d\Omega + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \sum_{v=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} (J_\lambda^{\text{pe}}) (J_v^{\text{pe}})^* d\Omega \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$= \int_{\Omega_\Lambda} |J^{\text{avg}}|^2 d\Omega + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} |J_\lambda^{\text{se}}|^2 d\Omega + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \int_{\Omega_\Lambda} |J_\lambda^{\text{pe}}|^2 d\Omega. \quad (2.81)$$

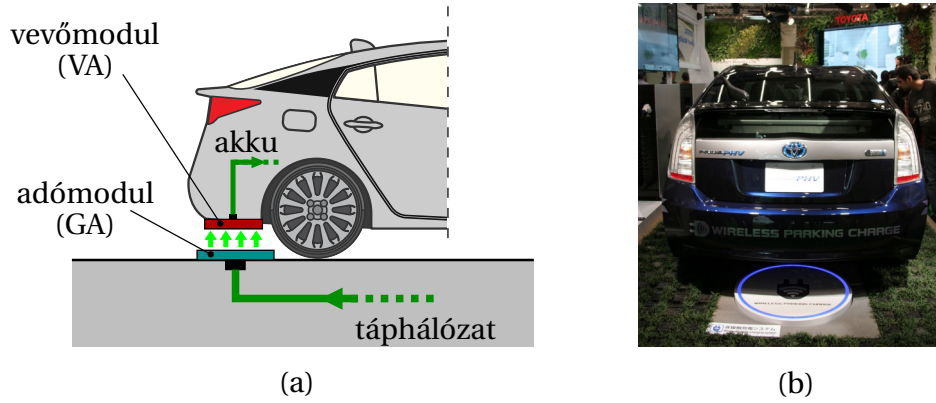
A szummázás és integrálás sorrendjét általában felcseréltük, az egyszerűsítés során pedig felhasználtuk a (2.74)-(2.79) összefüggéseket. Ezek közül kiemeljük, hogy a (2.80)-ban a kettős szummák vegyes indexű tagjai lényegében a (2.75) tulajdonság következtében válnak nullává.

A (2.81) eredmény a (2.72) felbontás áramkomponenseinek teljesítmény-ortogonalitását fejezi ki.¹⁹ Ez közvetlenül leképezhető a (2.73) huzalvesztesség felbontására:

$$P'_{\text{litz}} = P'_{\text{dc}} + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} P'_{\text{se},\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} P'_{\text{pe},\lambda}. \quad (2.82)$$

Mivel mindegyik veszteségkomponens arányos az I összáram abszolút értékének négyzetével,

¹⁹ Megjegyezzük, hogy Sullivan [102] hasonló áramfelbontására ez az ortogonalitás nem teljesül, mivel ott a BLSE-komponensek nem nulla középvértékűek.



2.12. ábra. Elektromos hajtású gépjárművek vezeték nélküli töltése: (a) koncepció, (b) megvalósítás Toyota Prius gépkocsin. (a felhasznált képek forrása: Vecteezy és [115])

ezért a (2.82)-nek megfelelő összefüggés akár az ellenállásra is megfogalmazható:

$$R'_{\text{litz}} = R'_{\text{dc}} + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} R'_{\text{se},\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} R'_{\text{pe},\lambda}, \quad (2.83)$$

továbbá ha – a $\lambda = 0$ tagok kiemelésével – elkülönítjük a köteg- és szálszintű jelenségeket, végül olyan felbontást kapunk, amelynek minden komponense megfeleltethető egy-egy örvényáram-részjelenségnek:

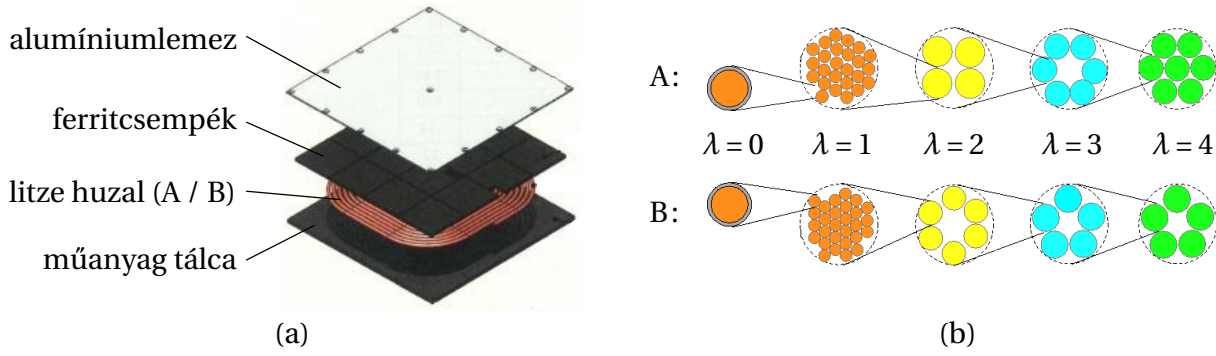
$$R'_{\text{litz}} = R'_{\text{dc}} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} R'_{\text{blse},\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} R'_{\text{blpe},\lambda} + R'_{\text{slse}} + R'_{\text{slpe}} \quad (2.84)$$

E felbontásra, valamint a komponensek frekvenciafüggésére a következő szakaszban mutatunk be példát.

2.8. Egy VA-Z1 típusú WPT tekercsmodul vizsgálata

Az előző fejezetekben ismertetett elméletet olyan, litze huzalból készült tekercs veszteségének számítására alkalmaztuk, amelyet az elektromos hajtású gépjárművek vezeték nélküli töltésénél használnak (2.12. ábra). E forradalmi technológia mai állásáról jó áttekintést ad Panchal és társai cikke [79].

A szóban forgó töltőrendszer megfelel a SAE J-2954 [92] szabványnak: üzemi frekvenciája $f = 85 \text{ kHz}$; $3,7 \text{ kW}$ teljesítményt visz át maximum 25 cm távolságon, $\eta > 90\%$ hatásfokkal (táphálózat-akkumulátor viszonylatban). Ennek része az általunk modellezett, VA-Z1 típusú ($VA = \text{vehicle assembly}$, azaz járműre szerelt) tekercsmodul, amelyet a japán Furukawa Electric Co., Ltd. (FEC) fejlesztett ki. A modellezés alapvető célja a tekercsvesztesség csökkentése, és ezáltal a hatásfok növelése volt. Számítási eredményeink egy részét a [47] folyóiratcikkben publikáltuk, míg más része csak zárt műszaki jelentésekben található meg; utóbbiakat a FETI és a FEC engedélyével mutatjuk be, azonban bizonyos adatokat a gyártó érdekében nem közlünk.



2.13. ábra. (a) A VA-Z1 tekercsmodul felépítése. (b) A vizsgált kétféle huzal kötegelése.

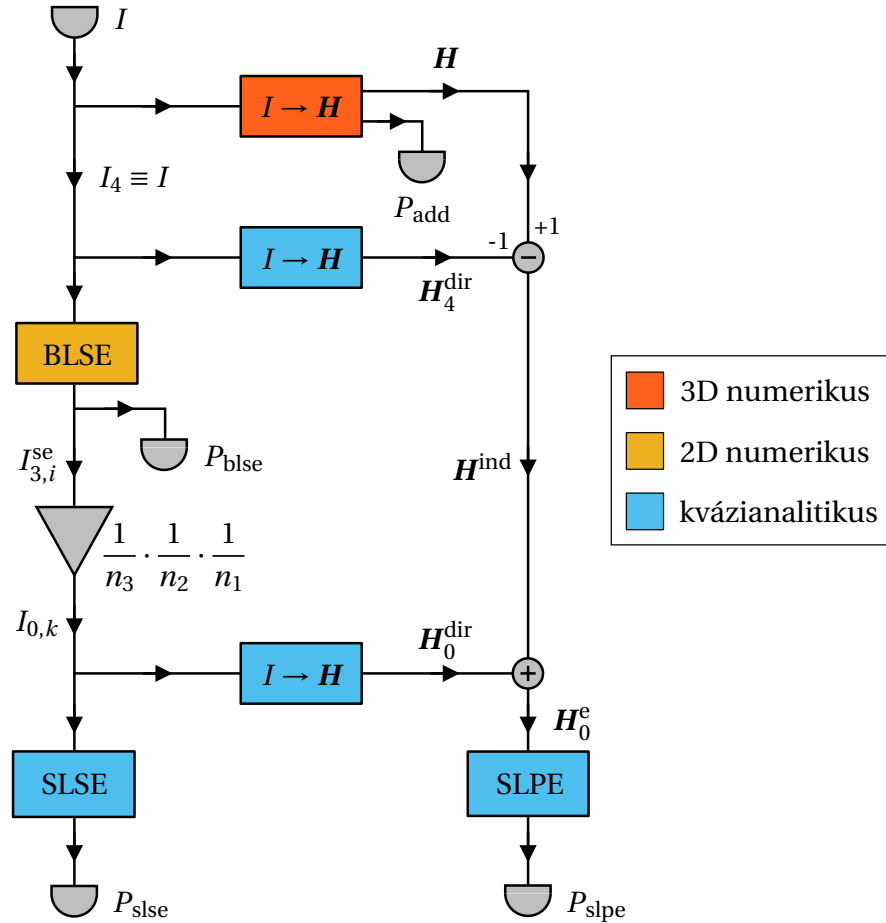
A VA-Z1 modul (2.13/a. ábra) a négyszögletes spiráltekercsen kívül tartalmaz egy műanyag tálcát, amelybe a litze huzalt fektetik, MBT1 anyagú [63] ferritcsempéket a fluxusterelés és árnyékolás céljából, valamint egy lezáró alumíniumlemezt.

A tekercsmodult két különböző litze huzallal teszteljük (lásd 2.13/b. ábra): egy $25 \times 4 \times 6 \times 7$ kötegrendűvel („A” típus) és egy $28 \times 6 \times 5 \times 5$ kötegrendűvel („B” típus). Fontos, hogy mindkét huzal azonos számú ($N_0 = 4200$), azonos keresztmetszetű ($r_0 = 25 \mu\text{m}$) és azonos anyagú (réz, $\sigma = 57 \text{ MS/m}$) vezetőszálból áll, csak a kötegsztruktúra eltérő. Az alapvető különbség, hogy az „A” huzal a legfelső ($\lambda = 4$) szinten tartalmaz egy centrális alköteget, míg a „B” huzal nem, ezért az előbbiben többletvesztés keletkezik a BLSE következtében (a kétféle huzal használatának célja történetesen éppen a BLSE vizsgálata). További adatok: a huzalok sugara $r_4 = 2,5 \text{ mm}$; teljes hosszuk a tekercsben, hozzávezetéssel együtt $l = 7 \text{ m}$; az elemi szálak kb. $5 \mu\text{m}$ vastag zománcszigeteléssel vannak ellátva.

Nézzük meg, hogyan módosul a veszteségszámítás 2.8. blokkdiagramja a vizsgált esetekben. Egyrészt mivel a huzalok igen hosszúak, ezért a BLPE várhatóan minden szinten elhanyagolható. Másrészt az „A” huzalnál a $\lambda = 2, 3$, míg a „B”-nél a $\lambda = 2, 3, 4$ szinteken a BLSE egyáltalán nem lép fel, mivel ott nincs centrális alköteg (lásd 2.13b. ábra). A $\lambda = 1$ szint viszont mindkét huzal tekintetében külön megfontolást igényel, ugyanis e kötegekben a nagy számú összesodort szál elvileg lehetővé teszi a BLSE felléptét. Annak megállapítására, hogy ez a hatás számottevő-e, végezzünk becslést: vezessük be a köteg ekvivalens homogenizált vezetőképességét (2.68) alapján, és vizsgáljuk meg, hogy az ezzel számolt behatolási mélység hogyan aránylik a köteg sugarához. Karakterisztikus frekvenciának válasszuk azt az $f_{0,1}$ értéket, amelyen $\delta_{\text{eq},1} = 2r_1$ teljesül:

$$r_1 \approx 150 \mu\text{m}, \quad \sigma_{\text{eq},1} \approx 0,44\sigma \quad \Rightarrow \quad f_{0,1} = \frac{1}{4r_1^2 \pi \mu_0 \sigma_{\text{eq},1}} \approx 112 \text{ kHz}. \quad (2.85)$$

Ez ugyan kissé felette van az üzemi frekvenciának (valószínűleg tudatos tervezés eredményeképpen), de ne felejtjük el, hogy csupán durva becslést végeztünk. Mindenesetre egyelőre elhanyagoljuk a BLSE hatását a $\lambda = 1$ szinten. A számítási folyamat megfelelően redukált blokkdiagramja a 2.14. ábrán látható. A diagram az „A” huzalra vonatkozik; a „B” esetében a BLSE blokk hiányzik, egyúttal a szorzótényező $(n_4 n_3 n_2 n_1)^{-1}$ értékre módosul.

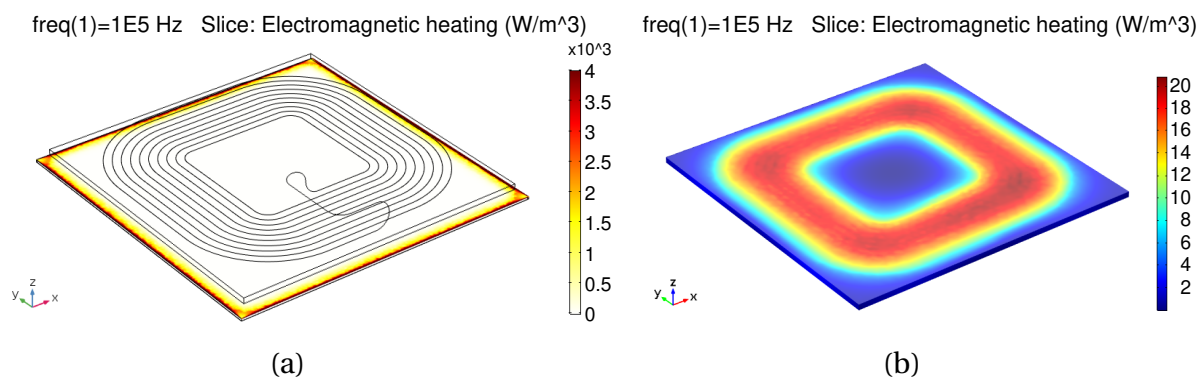


2.14. ábra. A számítás folyamatábrája (érdeemes összevetni a 2.8. ábra általános esetével).

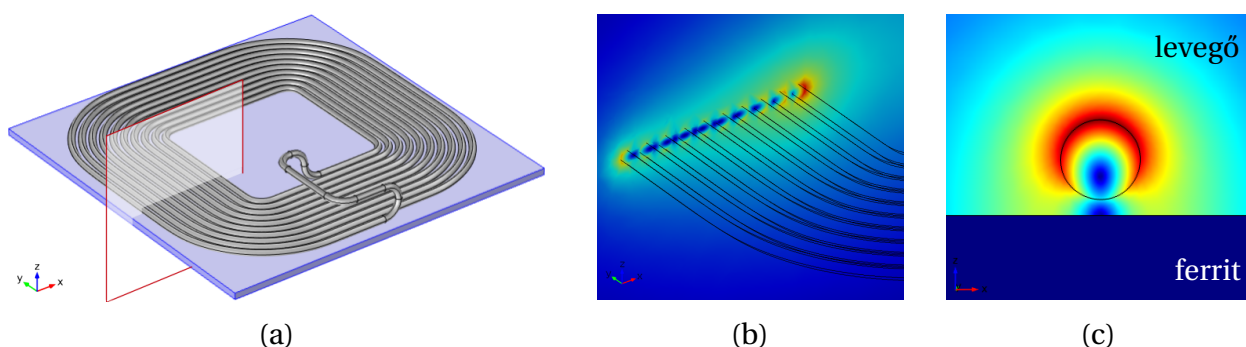
2.8.1. A nagy léptékű FEM modell eredményei

A nagy léptékű térszámítási modell a 2.5.1. szakaszban leírtak szerint épül fel: a tekercsen kívül tartalmazza a ferritcsempéket, az alumíniumlemezt és a környező levegőt. A műanyag tálcát a levegővel azonos tulajdonságú közegnek tekintjük, ezért külön nem modellezzük, a tekercshuzalt pedig idealizált áramszálként vesszük figyelembe (lásd 2.15. ábra). A modell kimenete a tekercs P_{add} járulékos vesztesége, valamint a H^{ind} mágneses térösszetevő (vö. 2.14. ábra). A szimulációt az 1-1000 kHz frekvenciaintervallumra végeztük el. A számításra a Comsol Multiphysics® végelem-szoftver AC/DC Modulját használtuk, amelyet egy közepes teljesítményű asztali számítógépen futtattunk.

Az alumíniumlemezben keletkező örvényáram-veszteség, illetve a csempékben fellépő ferritveszteség eloszlása a 2.15. ábrán látható. A megfelelő teljesítmény-összetevők ezek térfogati integráljai, amelyek frekvenciafüggését (ellenállás-értékre konvertálva) a 2.21. ábra mutatja. Érdekes, hogy bár az alumíniumban csak a lemez szélein keletkezik veszteség – vagyis ott, ahol a felette lévő ferrit már nem árnyékol – ennek mértéke olyannyira számottevő, hogy még a ferritveszteséget is meghaladja. Ezért célszerű lehet az alumíniumlemez kiváltása más anyaggal, természetesen a gazdaságossági és elektromágneses kompatibilitási (EMC) szempontokat is figyelembe véve.



2.15. ábra. Járulékos veszteség (a) az alumínium borítólemezben, és (b) a ferritrétegben.
(A tekercsmodul itt a 2.13/a. ábrához képest fordított állású.)

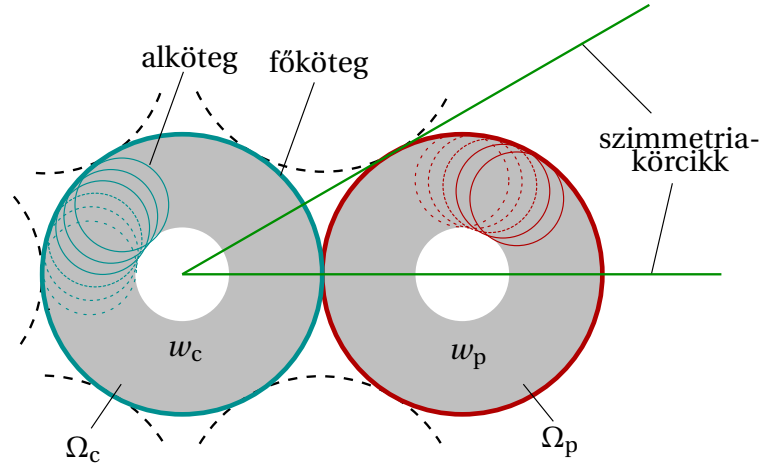


2.16. ábra. A \mathbf{H}^{ind} közvetett térösszetevő okai és hatása. (a) A vizsgált elrendezés és az ábrázolt metszet; (b) A szomszédos menetek hatása a mágneses térre ferrit nélkül; (c) a ferrit „tükröző” hatása egyetlen vezetékre.

E számítások másik célja a közepes léptékű modell bemenetéül szolgáló \mathbf{H}^{ind} mágneses tér meghatározása. Emlékeztetünk arra (lásd 2.5.2. szakasz), hogy \mathbf{H}^{ind} azt a *többletet* reprezentálja, amely a huzalban annak saját mágneses terén túl, a környezete hatására fellép. Ebben elkülöníthetjük a tekercs többi menetének, illetve a ferritnek a hatását (2.16. ábra). Utóbbiról tudjuk, hogy közelítőleg megfeleltethető egy olyan fiktív vonaláram-forrásnak, amelyet a huzalnak a levegő-ferrit határfelületre vett tükrözésével kapunk. E két hatás együtt lép fel, ráadásul egymást *erősítve*. Ennek érzékeltetésére meghatároztuk a mágneses térerősség négyzetének a (2.35)-höz hasonló átlagértékét a huzal térfogatában – amely jól jellemzi az SLPE mértékét – az említett hatások különböző kombinációira; az eredményt a 2.1. táblázatban foglaltuk össze.

2.1. táblázat. Az SLPE mértékét jellemző négyzetes térátlag a közvetett hatások kombinációira

$\langle H^2 \rangle$ (A^2/m^2)	egyenes huzal	spiráltekercs
ferrit nélkül	2027	4025
ferrittel	2580	11069



2.17. ábra. Redukált keresztmetszeti modelltartomány, valamint a w sűrűségfüggvények származtatása.

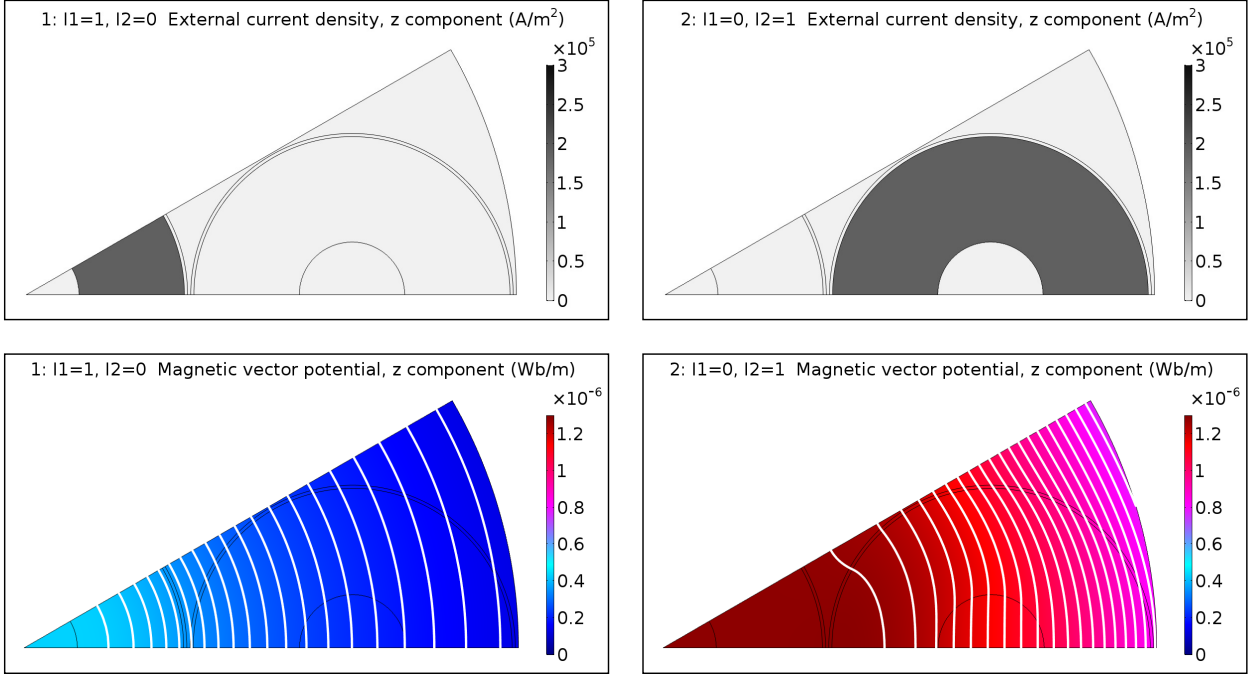
2.8.2. A közepes léptékű BLSE modell kiértékelése

Ezt a modellt a fentiek értelmében kizárólag az „A” huzal legfelső, 4. kötegelési szintjére kell alkalmaznunk (2.14. ábra). Mindenek előtt meghatározzuk azokat a w sűrűségfüggvényeket, amelyek az elemi szálak keresztmetszeti pozíciójának statisztikai eloszlását írják le a 3-as szintű kötegeken belül; nevezzük az utóbbiakat *főkötegnek* (2.17. ábra).

A huzal mentén végighaladva minden keresztmetszetben olyan lokális derékszögű koordináta-rendszert veszünk fel, amelyekhez képest a főkötegek helyzete rögzített, ezáltal kompenzáljuk azok csavarodását. Eközben viszont az alkötegek (ill. azok alkötegei) óhatatlanul látszólagos körpályák (ill. csavarvonalak) mentén mozognak, bejárva a keresztmetszet egy-egy résztartományát (lásd 2.17. ábra). Jelölje ezeket az – ideális esetben diszjunkt – tartományokat a centrális főkötegre nézve Ω_c , valamelyik kiválasztott periférikus főkötegre pedig Ω_p (lásd 2.6. szakasz). Amennyiben a főkötegek üregesek, úgy e tartományok „lyukasak”. A legegyszerűbb közelítésben feltesszük, hogy a szálak egyforma gyakorisággal fordulnak elő e tartományok minden pontjában, ennél fogva adódik, hogy

$$w_c(x, y) = \begin{cases} |\Omega_c|^{-1}, & (x, y) \in \Omega_c \\ 0, & \text{máshol} \end{cases} \quad \text{ill.} \quad w_p(x, y) = \begin{cases} |\Omega_p|^{-1}, & (x, y) \in \Omega_p \\ 0, & \text{máshol} \end{cases} \quad (2.86)$$

A következő lépés az A^c és A^p bázisok meghatározása (2.51) szerint, a (2.49) stacionárius sík-probléma kétszeri megoldásával. Kihasználva a huzal nagyfokú szimmetriáját, a modelltartományt a keresztmetszet egy tizenketted körcikkére szűkíthetjük (lásd 2.17. ábra). A számítást ezúttal is a Comsol Multiphysics® szoftverrel végeztük; az eredmények a 2.18. ábrán láthatók.



2.18. ábra. A vektorpotenciál (2.51) bázismegoldásai a szimmetria-körcikken. A felső sorban a gerjesztőáram, az alsóban pedig az A^c és A^p megoldás látható színtöltéssel és kontúrvonallal ábrázolva (az utóbbiak tekinthetők egyszerismind indukcióvonalaknak is).

Ezekből a (2.53), (2.60)-(2.61), ill. (2.66) alapján származtatott aszimptotikus jellemzők:

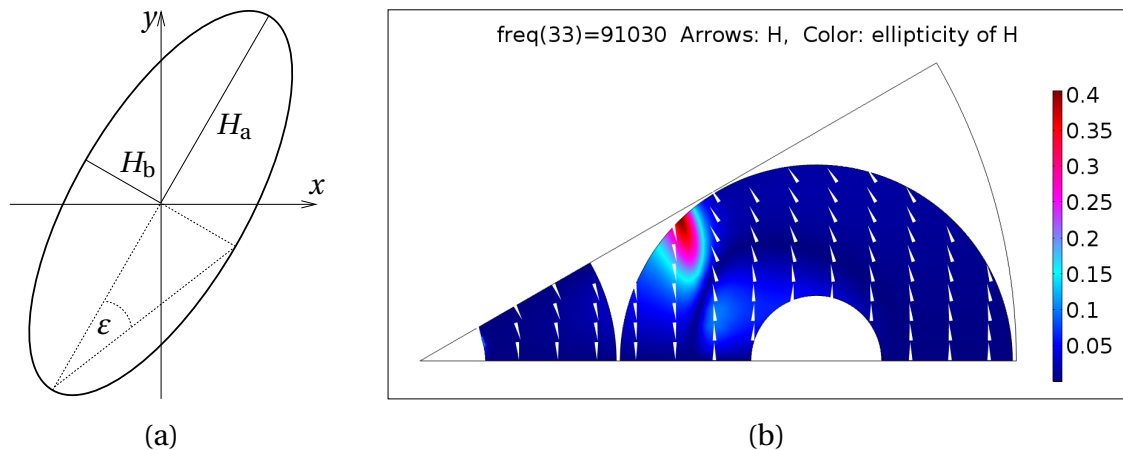
$$\begin{aligned} \Delta A^c &= -1,85 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} & K_\infty &= 1,073 \\ \Delta A^p &= -1,73 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} & \rho_\infty &= -\pi \\ & & f_0 &= 13,42 \text{ kHz} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \frac{R_{\text{blse}}}{R_0} \bigg|_{f \gg f_0} = 1,87 \quad (2.87)$$

Nyilvánvaló, hogy az $f = 85 \text{ kHz} \gg f_0$ üzemi frekvencián már a BLSE felső határértékei érvényesek. Bár a periférikus kötegek áramának amplitúdója alig haladja meg a centrálisét ($K_\infty = 1,073$), utóbbiban az áram éppen az előbbiekkal ellenkező irányba folyik ($\rho_\infty = -\pi$). A BLSE által okozott ellenállás-növekedés mintegy 87 %-os az egyenáramúhoz képest, azonban hangsúlyoznunk kell, hogy ez csupán a közvetlen hatás, ugyanis a kötegáramok átrendeződése közvetve kihat az SLSE és SLPE veszteségkomponensekre is.

A közepes léptékű modellnél megvizsgáljuk a mágneses tér ellipticitásának (más néven polarizáltságának) kérdését, amelynek a közelségi hatás, azon belül az SLPE számításánál van jelentősége (2.5.3. szakasz). A szinuszos időbeli változás következtében a mágneses térerősség vektora általánosan ellipszist ír le. Az ellipticitás mértékét a 2.19/a. ábrán látható ε szög tangensével jellemezzük, amely lényegében az ellipszis kis- és nagytengelye félhosszáinak hányadosa [7]:

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{|\mathbf{H}_b|}{|\mathbf{H}_a|} \in [0, 1], \quad \mathbf{H}_a + j\mathbf{H}_b = \frac{\sqrt{\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}^*}}{|\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}|} \mathbf{H}. \quad (2.88)$$

Nyilvánvaló, hogy a 0 érték a tisztán oszcilláló, míg 1 a tiszta forgómezőnek felel meg. A 2.19/b. áb-



2.19. ábra. (a) Az ellipticitás értelmezéséhez. (b) A mágneses térerősség ellipticitás-eloszlása a huzalkeresztmetszetben (színkitöltés: $\tan \epsilon$, nyílfolyam: \mathbf{H}).

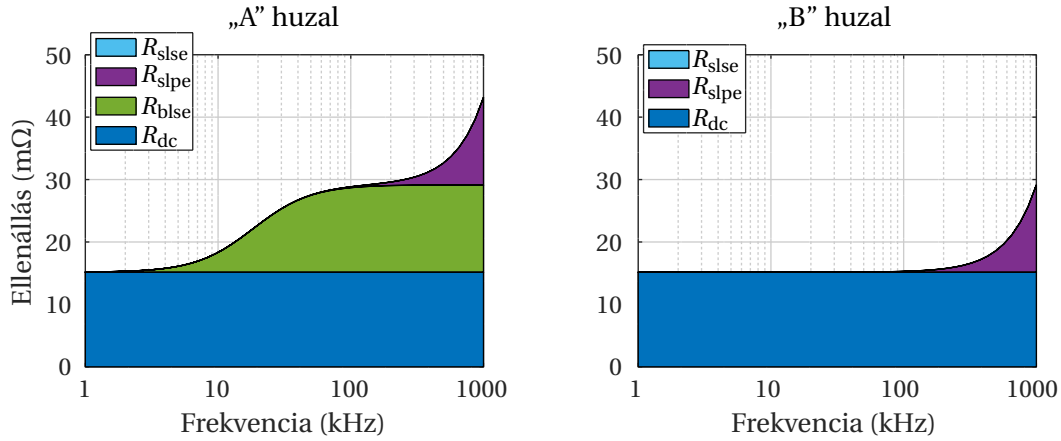
ra az ellipticitás nagyságát mutatja a vezető keresztmetszet pontjaiban. Az ábra tanúsága szerint a mágneses tér a teljes keresztmetszetben oszcilláló jellegű, egy viszonylag szűk tartomány kivételével. Ebből következik például, hogy az SLPE G_{pe} tényezője kör keresztmetszetű szálra a szokásos (2.30) formulával számolható.

2.8.3. A veszteségek összegzése és ellenőrzése méréssel

Először csak az önmagában álló, egyenes huzal veszteségét követjük nyomon szimulációval a viszonylag széles 1-1000 kHz frekvenciasávban. Ez azt jelenti, hogy egyelőre eltekintünk a környezetben disszipált járulékos veszteségektől, valamint a környezet által a huzal térfogatában keltett, közvetett veszteségektől is (pl. „ferrit-tükrözés”, lásd 2.8.1. szakasz). Az SLSE és SLPE veszteségeket a 2.5.3. szakaszban leírtak szerint számoljuk.

A veszteség összetevői és azok frekvenciafüggése a két huzalra a 2.20. ábrán látható. Az „A” huzal esetében (baloldalt) a DC ellenállásra 5 kHz felett fokozatosan rátevéődik a BLSE okozta többletvesztés, amely kb. 100 kHz felett állandósul. Az SLPE viszont éppen itt kezd növekedni, mégpedig elvileg korlát nélkül: nem véletlen, hogy a MHz-es tartományban már nemigen szokás litze huzalt használni. Érdekes ugyanakkor, hogy az SLSE ezen a tartományon végig elhanyagolható (az ábrán egyáltalán nem kivehető a járuléka), ám nem meglepő, mivel még 1 MHz frekvencián is $\delta \approx 67 \mu\text{m} > 2r_0$ teljesül. A „B” huzalnál (jobb oldalt) ugyanezeket az összetevőket látjuk, a BLSE komponens kivételével. Bár ez utóbbi az SLSE és SLPE összetevőket is módosítja, az eltérés láthatóan csekély.

A következő lépésben már a teljes tekercsmodul veszteségét vizsgáljuk, de a szűkebb 10-100 kHz tartományon, egyrészt mivel az alkalmazás szempontjából ez a releváns, másrészt mert erre vonatkozóan vannak méréseink. A szimulált eredmények azt mutatják, hogy a két különböző huzalra nem csak a járulékos veszteségek egyeznek meg (ami természetes, hiszen azok számításánál a huzalstruktúrát nem vesszük figyelembe), de az SLPE veszteségkomponens is közel azonos módon változik meg a huzalkörnyezet hatására. Emiatt a veszteség felbontását

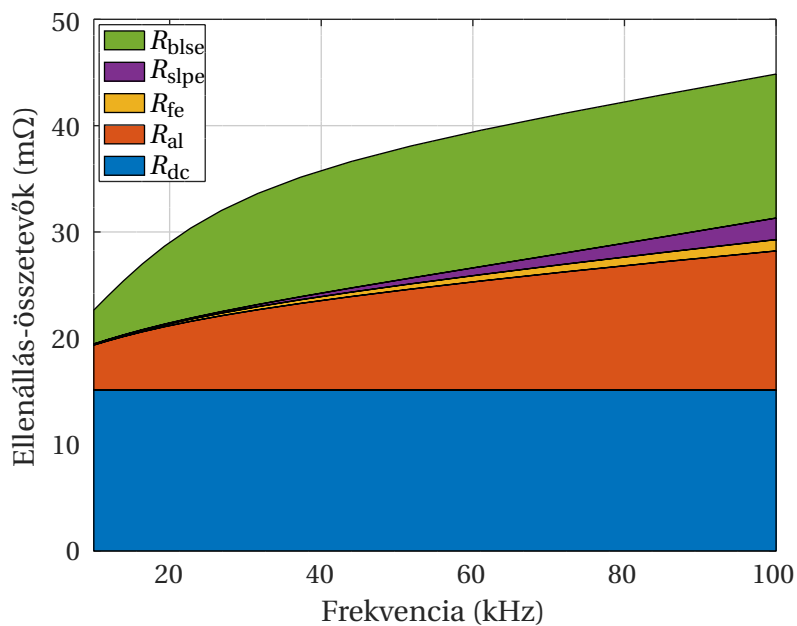


2.20. ábra. A kétféle *huzal* ellenállásának összetevői és frekvenciafüggése.

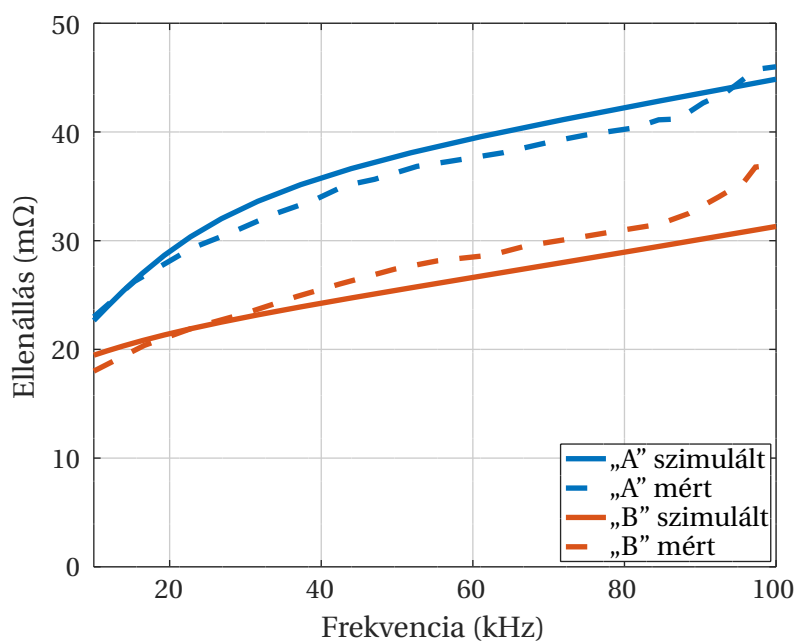
csak az „A” huzal esetére mutatjuk be (2.21. ábra), míg a „B” huzal esetében mindössze a legfelső (zöld) BLSE területet kell elhagyni (ennek érdekében rendeztük át a komponensek sorrendjét a 2.20. ábrához képest). Az ábra alapján elmondható, hogy ebben a tartományban a tekercsmódul ellenállásán három komponens: az huzal egyenáramú ellenállása, a kötegszintű áramkiszorítás okozta ellenállás-növekmény, és az alumíniumlemez örvényáram-vesztesége osztozik közel egyenlő arányban. Ezekhez képest mind a ferritveszteség, mind a szálszintű közelségi hatásból eredő veszteség csekély.

A két tekercsmódul ellenállását a FEC munkatársai megmérték egy Agilent 4294A típusú impedancia-analizátorral. Az eredmények a 2.22. ábrán láthatók szaggatott vonallal; ugyanitt az összehasonlítás végett felvettük a szimulált görbéket folytonos vonallal. Az elmélet, valamint a veszteségkomponensekre kapott számítási eredmények alapján úgy gondoljuk, hogy az adott esetben a két különböző huzallal kapott görbék eltéréseért lényegében önmagában a BLSE felelős. Megjegyezzük, hogy jelenleg ez a megoldás tűnik a BLSE-mérés egyetlen járható útjának (vö. [90]).

Bár a szimulált és mért görbék nem egyeznek pontosan, az utóbbiak jól tükrözik az elméleti modell által megjósolt aszimptotikus viselkedést. A görbék jellegében lényeges eltérés csupán 90 kHz felett jelentkezik. A szigmoid alak azt valószínűsíti, hogy ezt az ellenállás-növekedést a $\lambda = 1$ szintű kötegekben fellépő BLSE okozza, amelynek karakterisztikus frekvenciáját a 2.8.1. szakaszban 112 kHz-re becsültük, de amely a mérés szerint valójában $f_{0,1} \approx 95$ kHz lehet. Ennek tisztázása további szimulációt igényelne.



2.21. ábra. Az „A” típusú huzallal készült *tekercs* ellenállásának összetevői és frekvenciafüggése. (A frekvenciaskála lineáris.)



2.22. ábra. Az „A”, illetve „B” típusú huzallal készült tekercsek szimulált és mért ellenállás-karakterisztikáinak összehasonlítása.

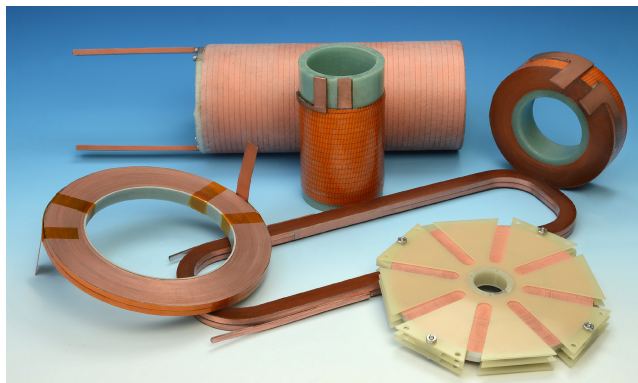
3. fejezet

Homogenizált szalagtekercs-modell

A vékony szalagból vagy fóliából készült áramvezető tekercset a műszaki élet számos területén megtaláljuk. Hagyományos vezetőanyagból (rézből vagy alumíniumból) göngyölt fóliatekercset használnak például a hangtechnikában (3.1. ábra), mert állítólag jobb hangminőséget biztosít, mint a hengeres huzalból csévéltekercset. Újabban pedig a magas hőmérsékletű szupravezető (*high temperature superconductor*, HTS) szalagtekercsek mind nagyobb térhódításának lehetünk tanúi (3.1. ábra). Ilyet használnak többek között a részecskegyorsítók és MRI berendezések nagy térerejű elektromágnesében, mágneses energiatárolókban, energiaellátó rendszerek fojtótekercseiben és zárlatiáram-korlátozóiban, valamint villamos forgógépekben és transzformátorokban [74, 110]. Felépítésüket tekintve ugyancsak ide sorolhatók a fóliakondenzátorok és a spirálcellás akkumulátorok (lásd pl. [84]), habár a bennük lejátszódó fizikai jelenségek némileg más természetűek.

Az említett eszközök számítógépes szimulációja mindmáig kihívást jelent, mivel nagy metszűrűségű, karakterisztikus méretéhez képest igen kis szalagvastagsággal rendelkező tekercset kell vizsgálni eltérő mérettartományokon (a probléma hasonló, mint a 2. fejezetben tárgyalt litze huzalnál). A szupravezető tekercsnél mindezt tetézi még a bonyolult nemlineáris, csatolt hőtani-elektromágneses jelenség.

Munkánk során olyan homogenizáló eljárást dolgoztunk ki, amellyel egyrészt jóval hatékonyabb a szimuláció, másrészt a bonyolult áramkényszeres gerjesztés helyett feszültségkényszer alkalmazható. Az eljárás kidolgozása során elsősorban a HTS tekercset – mint legfontosabb gyakorlati alkalmazást – tartottuk szem előtt, de minden további nélkül alkalmazható hagyományos fóliatekercsek, vagy akár akkumulátor-cellák modellezésére, valamint adaptálható hőtani és egyéb transzportfolyamatokra is. Az alábbiakban a rövid irodalmi áttekintést követően kifejtjük az eljárás elméleti alapjait, majd egyszerű tesztfeladatokon keresztül elemezzük a pontosságát és korlátait, végül alkalmazzuk egy HTS tekercs kritikus állapotának szimulációjára.



3.1. ábra. Baloldalt egy hangtechnikában használt, viasszal impregnált rézfóliatekercs látható (forrás: *Jantzen-audio.com*). Jobboldalt HTS szalagból készült, változatos alakú tekercsek; a SuperPower[®] cég termékei [105].

3.1. A meglévő módszerek áttekintése

A tekercsmodell részletessége, bonyolultsága attól függ, mi a modellezés célja. Ha például csak a *nagy léptékű* mágnesező hatására vagyunk kíváncsiak, akkor elegendő azt egy előírt áramsűrűségű, *homogén* térrészként modellezni. Ha viszont a menetekben fellépő örvényáram-veszteség is érdekes, akkor olyan modellre van szükség, amely e *kis léptékű* térváltozásokat is figyelembe veszi (vö. 2. fejezet). Néha olyan jelenséget vizsgálunk, amely a tekercsnek csupán igen kis tartományára korlátozódik, más szóval *lokális*, mégis kihat a teljes eszköz működésére. A szupravezető tekercsnél ilyen a *quench* (lásd 3.6. szakasz). Ekkor a szóban forgó tartományon viszonylag részletes és pontos modellre van szükség, míg a többi térrészre gyengébb minőségű közelítés is megteszi.

Az ilyen jellegű problémák – amint a bevezetőben taglaltuk – kombinált, *többléptékű* modellel oldhatók meg igazán hatékonyan, ahol a nagy léptékű, általában homogenizált modell eredményei felhasználhatók a kisebb léptékűben, és viszont. A modellek közötti csatolás lehet *egyirányú*: a menetekben indukálódó „kis hurkú” örvényáramok vesztesége például a nagy léptékű modell eredményéből kiindulva utólag, menetenként számítható (vö. [32, 83, 96]). Ezzel szemben a *quench* szimulációjánál kétirányú, szimultán csatolás szükséges [54].

A vékony *huzalból* sűrűn csévelt, sokmenetes tekercset a nagy léptékű modellben általában úgy idealizáljuk, hogy rögzített tekercsáram és egyenletes menetáramok mellett a menetszámmal gondolatban a végtelenhez tartunk. Ebből következően a *huzaltekerceset* olyan *homogén* tartományként (kontinuumként) szokás leírni, amelyben az áramsűrűség-vektormező abszolút értéke állandó, vektoriránya pedig a tekercselés idealizált (menetemelkedés nélküli) irányát követi. *Szalagtekercsnél* azonban nem ilyen egyszerű a helyzet: bár a menetek árama itt is azonos, eloszlásuk a szalag keresztmetszetében változhat, márpedig a szalag *szélessége* nagy léptékben mérve is számottevő (általában centiméter nagyságrendű). Nem véletlen, hogy a tömör (*bulk*) és a szálakból sodrott (*stranded*) vezetők mellett – harmadikként – a szalagból göngyölt struktúrák (*foil winding*) modellezésével külön is foglalkozik a szakirodalom (lásd pl. [29, 31, 95]).

Ebben a fejezetben csak a *nagy léptékű* modellel foglalkozunk, mivel a szalagtekercsnél ez önmagában is eléggé érdekes feladat. Ugyanakkor a kis léptékű modellek valamint azok csatlóása tekintetében az idézett bőséges szakirodalomra hagyatkozhatunk. Továbbá, mivel a szóban forgó eszközök szimulációjára a gyakorlatban szinte kizárólag a végeelem módszert használják, ezért hallgatólagosan mi is ezt tartjuk szem előtt.

3.1.1. Tér- és potenciálformalizmusok

A szalagtekercsek tipikus, alacsony frekvenciás alkalmazásaiban az (1.1)-(1.4) Maxwell-egyenletek magneto-kvázistacionárius (MQS) közelítése érvényes, amelynek időtartománybeli alakja:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

Az ezeket kiegészítő konstitúciós egyenletek:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{ill.} \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{ill.} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (3.5)$$

A tipikus alkalmazási területekre tekintettel feltesszük, hogy a közegek mágneses szempontból lineárisak (többnyire $\mu \approx \mu_0$), míg az elektromos vezetés szempontjából nem feltétlenül azok: a fajlagos vezetőképesség függhet az elektromos és a mágneses tértől, továbbá egyéb, nem elektromágneses mennyiségektől, például a hőmérséklettől, azaz formálisan

$$\sigma = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{B}, T, \dots) \quad (3.6)$$

A végeelemes számításokban általában egy a Maxwell-egyenletek redukálásával nyert parciális differenciálegyenlet-rendszert (PDE) oldunk meg, amelyet a megfelelő határ- és peremfeltételekkel kiegészítve, összefoglalóan *formalizmusnak* nevezzük.

Szalagtekercsek számítására az \mathbf{A} - V formalizmus (lásd pl. [23, 29, 31, 34]) és a \mathbf{H} -formalizmus (pl. [2, 119, 120, 121]) terjedt el leginkább. Az utóbbi mellett az szól, hogy a menetek összárama egyszerűbben és pontosabban előírható (lásd 3.1.3. szakasz), valamint hogy a diszkretizálással adódó nemlineáris algebrai egyenletrendszer konvergenciatulajdonságai jobbak,¹ mint az \mathbf{A} - V esetében. A kettő összehasonlításáról a [93] cikkben olvashatunk. Említésre méltó még a HTS tekercseknél nemrég bevezetett „hibrid” \mathbf{T} - \mathbf{A} formalizmus [6] is – ebben \mathbf{T} az áramvektorpotenciált jelöli [70] – ám ezzel nem foglalkozunk külön.

¹ Habár ez gyaníthatóan inkább a Comsol Multiphysics® nemlineáris megoldóalgoritmusát jellemzi, mivel szupravezető-modellezésre túlnyomó részt ezt a szoftvert használják.

A-V formalizmus

Bevezetjük az \mathbf{A} mágneses skalárpotenciált és a V elektromos skalárpotenciált:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (3.8)$$

Ezáltal (3.2) és (3.3) automatikusan teljesül, míg a (3.1) gerjesztési törvény így írható:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V. \quad (3.9)$$

A vektorpotenciál egyértelműségéhez meg kell adnunk annak divergenciáját is; ezt hívjuk mértékválasztásnak.² Ezen a területen általában a Coulomb-mértéket használjuk:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.10)$$

A mérték érvényesítésének bevált módja, hogy a (3.9) egyenletet bal oldalát bővítjük a $-\nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A}$ taggal. Mivel az áram folytonossága egzakt módon következik a (3.1), ill. (3.9) gerjesztési törvényből,³ ezért (3.10) éppen azáltal biztosítható, hogy az áram folytonosságát (nulla divergenciáját) egy további egyenlettel explicit módon előírjuk. A megoldandó PDE-rendszer:

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \nu \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \sigma \nabla V = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \left(-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \right) = 0 \quad (3.12)$$

H-formalizmus

Ebben az esetben nem vezetünk be potenciált, helyette arra törekszünk, hogy a térszámítási problémát egyedül a \mathbf{H} mágneses térerősségre, mint ismeretlenre nézve fogalmazzuk meg. Mint említettük, a

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.13)$$

egyenlet tetszőleges \mathbf{H} mellett biztosítja az áram folytonosságát. Ezt, valamint a (3.4)-(3.5) konstitúciós egyenleteket (3.2)-be helyettesítve az indukciótörvény

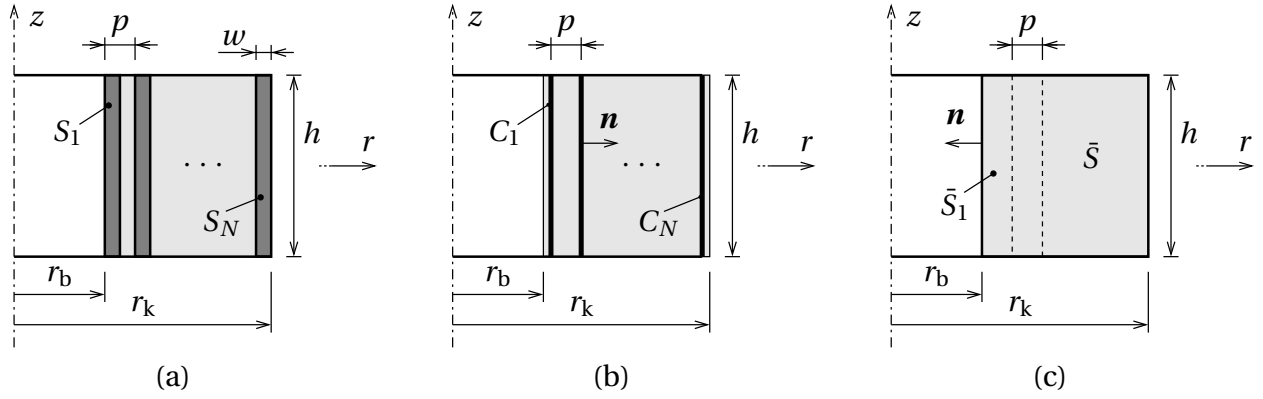
$$\nabla \times \rho \nabla \times \mathbf{H} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.14)$$

alakú. \mathbf{H} mértékválasztásának szerepét ezúttal maga a (3.3) Maxwell-egyenlet veszi át:

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (3.15)$$

² A mértékválasztás élváltozós végelemek (ún. *edge*-elemek), valamint iteratív egyenletrendszer-megoldó használata esetén akár el is hagyható [70].

³ Mindkét oldal divergenciáját véve, majd a vektoranalízis ismert nulla-azonosságát felhasználva.



3.2. ábra. Szalagtekercs háromféle geometriai modellje: menetszintű térfogati (a), menetszintű felületi (b), és homogenizált avagy kontinuummodell (c).

Ezt hasonló módon tudjuk figyelembe, mint az A - V módszernél, vagyis egy „nullázandó” tag beiktatásával. Így a megoldandó PDE:

$$\nabla \times \rho \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (3.16)$$

3.1.2. Geometria és diszkretizálás

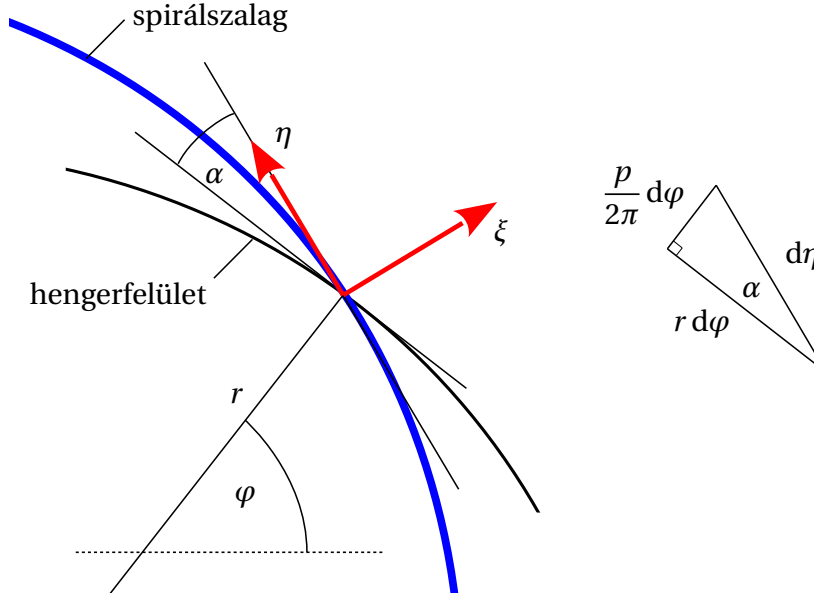
A matematikai tárgyalás egyszerűsítése végett a továbbiakban csupán hengeres spirálszalagtekercs vizsgálatára szorítkozom, de az általam bevezetett új módszerek bármilyen elvi akadály nélkül adaptálhatók más geometriára, pl. a gyakorlatban fontos ovális *racetrack* tekercsre (lásd pl. [73, 119]). Megjegyzendő, hogy ezzel az egyszerűsítéssel nem feltétlenül csökken a számítás erőforrásigénye. A hengeres szalagtekercs ugyan – kis menetemelkedés mellett – közel forgásszimmetrikusnak tekinthető, ám ha a tekercs környezete (pl. vasmag, árnyékolás, stb.) nem rendelkezik ugyanilyen szimmetriával, illetve ha olyan lokális jelenséget vizsgálunk, mint a HTS esetében a *quench*, akkor mégis 3D tartományra kell a modellszámítást elvégezni. Bár bizonyos esetekben elegendő lehet egy 2D keresztmetszeti modell is (lásd pl. [6, 120]), módszerünkönél alapvetően a 3D modell szükségességét és követelményeit tartjuk szem előtt.

A tekercs méretparaméterei a 3.2/a. ábrán láthatók, a keresztmetszetén felvéve. A tekercs belső, ill. külső sugara r_b és r_k , a szalag szélessége h , vastagsága w , menetemelkedése p . Az alábbi összefüggések teljesülnek:

$$p = \frac{r_k - r_b}{N}, \quad l \approx 2\pi \frac{r_k + r_b}{2} N, \quad \chi = \frac{w}{p}, \quad (3.17)$$

ahol N a menetszám, l a szalag hossza, és χ a kitöltési tényező.

A normál vezetőből készült fóliatekercseknél a fólia vastagsága általában jóval kisebb, mint az adott üzemi frekvencián érvényes behatolási mélység, csupán a szélessége nagyobb annál, ezért az árameloszlás a fólia keresztmetszetében lényegében 1D eloszlással jellemezhető [29]. A HTS szalag esetében pedig a szupravezető réteg még a 0,1 mm nagyságrendű szalagvastagság-



3.3. ábra. Spirális koordináta-rendszer, és kapcsolata a hengerkoordinátákkal.

hoz képest is elenyészően vékony, mindössze $1\ \mu\text{m}$ körüli. Ezeket kihasználva a vezetőszalagot infinitezimálisan vékony tartományként, azaz „kétoldalas” határfelületként is le lehet írni [6, 23]. A megfelelő modellgeometriát a 3.2/b. ábra szemlélteti. Hozzáteesszük azonban, hogy a 3D modelltartomány menetszintű diszkretizálása még ezzel a jelentős egyszerűsítéssel is szinte ki-látástalan, legalábbis egy gyakorlatban használt, nagy menetszámú tekercs esetében.

A fóliatranszformátorok számítása során merült fel először a 3D modellek drasztikus egy-szerűsítésének igénye [29, 31]. Észrevették, hogy a mágneses mező a térben csak lassan változik, azaz nem követi a fóliarétegek finomstruktúráját, valamint hogy a V skalárpotenciál változása a tekercsben lokálisan 1D jelleget mutat, mégpedig a fóliára merőleges irányban. Ezért kézen-fekvő volt a megoldás, hogy az A vektorpotenciált egy viszonylag ritka 3D hálón diszkretizálják, míg a skalárpotenciált a tekercs térfogatában speciális, a fóliákra illeszkedő vége-selemes for-mafüggvényekkel [29], vagy globális függvényekkel [31] közelítsék. Ezzel megszületett a fóliate-kercs *homogenizált* avagy *kontinuummodellje* (3.2/c. ábra), amelyet utóbb alkalmaztak a HTS szalagtekercsre [36, 54, 73, 93], valamint egyéb hasonló struktúrákra [84] is. A homogenizált 3D modellnek a következő szakaszban tárgyalt *menetáramkényszer* miatt elengedhetetlen eleme az *anizotrop vezetőképesség*.

A továbbiakra nézve az (r, φ, z) hengerkoordináták mellett célszerű a spirálpályához illeszke-dő (ξ, η, z) koordinátákat is bevezetni. Ezeket, valamint a kettő közötti átszámítást segítő össze-függéseket a 3.3. ábra szemlélteti.

3.1.3. Globális kényszerek

A gerjesztés, a térmodellel csatolt koncentrált paraméterű hálózatok, valamint bizonyos esetek-ben a menetáramok egyenlősége ún. *globális kényszerként* jelenik meg a vége-selem-modellemben.

Érvényesítésük megkívánja, hogy az áramok és feszültségek a térjellemzőkkel *kiértékelhetők*, illetve általuk *előírhatók* legyenek. Ennek célszerű módja egyaránt függ a geometriai modelltől és az alkalmazott formalizmustól (3.1.1. és 3.1.2. szakasz), de általában valamilyen integrál formájában valósul meg. Ezek az ún. *integrálkényszerek* a végeelem módszerben többnyire *gyenge alakban*, pl. Lagrange-multiplikátor által érvényesíthetők [23, 29, 31].

Az áram kifejezése

A tekercsben folyó I áram⁴ egy a szalag keresztmetszetét kitöltő (de egyébként tetszőleges) S felületre vett integrállal fejezhető ki:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.18)$$

Az \mathbf{A} - V módszer esetében az itt szereplő áramsűrűség (3.5) és (3.8) alapján a

$$\mathbf{J} = \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right) \quad (3.19)$$

képlettel számítható, azaz a térváltozók hely és idő szerinti deriváltjait is tartalmazza. A \mathbf{H} -formalizmus esetében jóval egyszerűbb a helyzet, ugyanis (3.13) és a Stokes-tétel alapján

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{c}, \quad (3.20)$$

vagyis az áram közvetlenül a \mathbf{H} térváltozó zárt vonalintegráljaként adódik.

Érdemes külön kitérni a 3.2/b. ábrán látható felületszerű modellre, amelyben \mathbf{J} szerepét a \mathbf{K} felületi áramsűrűség veszi át. Az áram egy tetszőleges, a szalagfelületet átfogó C görbére az

$$I = \int_C (\mathbf{n} \times \mathbf{K}) \cdot d\mathbf{c} = \int_C (\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times [\mathbf{H}]) \cdot d\mathbf{c} \quad (3.21)$$

vonalintegrállal számolható, amelyben \mathbf{n} a felületi normális, és az $[\cdot]$ operátor egy mennyiség adott felületen fellépő, ugrásszerű változásának mértékét adja meg. Felhasználtuk még a mágneses térerősség ismert folytonossági tulajdonságát a közegetáron [98].

Végül a 3.2/c. ábra kontinuummodelljére az áram kézenfekvő módon az

$$I = \frac{1}{N} \int_{\bar{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{N} \oint_{\partial \bar{S}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{c} \quad (3.22)$$

formulák valamelyikével számolható, ahol \bar{S} a teljes tekercskeresztmetszetet átfogó felület, $\partial \bar{S}$ pedig annak kontúrja.

A menetáramok egyenlősége

A menetek árameloszlását nem ismerjük előre – éppen annak meghatározása az egyik cél – de azt tudjuk, hogy az összáram bármely menet tetszőleges keresztmetszetében ugyanaz az I ér-

⁴ Ebben a fejezetben U és I az áram, illetve feszültség *időfüggvényét* jelöli.

ték, mivel az MQS közelítésben eltekintünk a kapacitív hatásoktól. E kényszerfeltétel megjelenítése a végeelem-modellben kulcsfontosságú.

A háromdimenziós, menetszintű, térfogati, ill. felületi modellekben a menetáramok állandóságát a környező szigetelőanyag nulla (egyres modellekben véges, de nagyságrendekkel kisebb) vezetőképessége biztosítja. A 2D keresztmetszeti modellben azonban ezt minden menetre külön-külön elő kell írni [120]; pl. a 3.2/a. ábra jelöléseivel, hengerkoordinátákban:

$$\int_{S_k} J_\varphi ds = I, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.23)$$

Nagyszámú menet esetén e feltételrendszer előírása meglehetősen körülményes, és általában a konvergenciát is rontja.

Még bonyolultabb a helyzet a homogenizált esetben (3.2/c. ábra). A 2D keresztmetszeti modellben még járható út, hogy a valódi meneteknek rendre megfeleltetünk p szélességű, $\sigma\chi$ vezetőképességű \bar{S}_k tartományokat, és a (3.23) feltételrendszert e „virtuális menetekre” írjuk elő. A 3D modellben azonban ennek *minden* keresztmetszetben teljesülnie kell, ami elvileg végtelen sok feltétel előírását tenné szükségessé [119].

Kézenfekvő megoldás, hogy a homogenizált tartományon olyan anizotrop vezetőképességet veszünk fel, amely megakadályozza a menetekre merőleges áramtranszfert,⁵ mert akkor elegendő a menetáramkényszert egyetlen, tetszőlegesen választott keresztmetszetben, a (3.23) formában előírni. A szakirodalomban olyan $\bar{\sigma}$ vezetőképesség-tenzorokkal találkozunk, amelyek egyik főiránya a tekercs tengelyével, a másik az *idealizált* menetiránnyal párhuzamos, a harmadik pedig merőleges mindkettőre [31, 84, 119].⁶ Hengeres tekercsnél ez rendre a z , φ és r hengerkoordináta-irányokat jelenti, amelyben a tenzor kifejezése triviálisan

$$\bar{\sigma} =_{(r\varphi z)} \sigma\chi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Itt figyelembe vettük a χ kitöltési tényezőt is. Ebből az alakból elvileg $J_r = 0$ következne, de a diszkretizálás, a végeelem módszer gyenge alakja, valamint a numerikus hiba miatt általában csak közelítőleg teljesül.

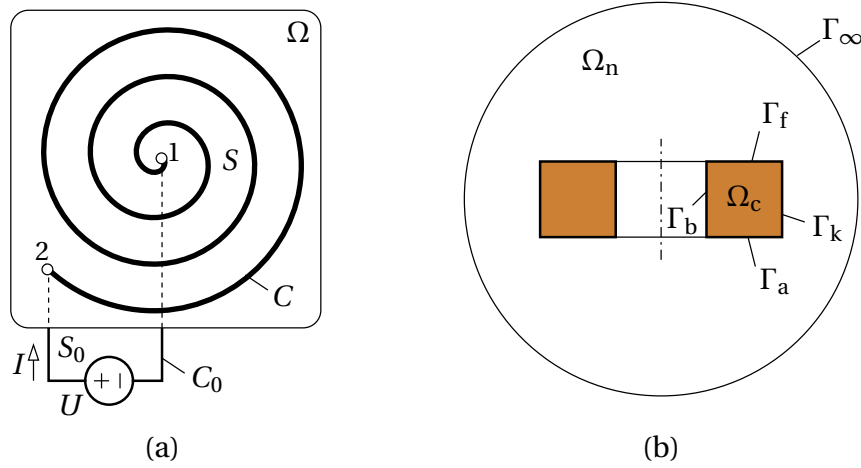
Gerjesztés, és a feszültség kifejezése

A tekercset tápláló villamos hálózat általánosan generátornak tekinthető (3.4/a. ábra). Ez képviselhet feszültségkényszert (ahol U előírt, és I meghatározandó), áramkényszert (I előírt, U meghatározandó), vagy vegyes kényszert (U és I viszonya előírt, mindkettő meghatározandó). A HTS tekercsek esetében például általában áramkényszerrel dolgoznak.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az egyes menetek a modellben elkülönített tartományokat

⁵ Hasonlóan ahhoz, ahogyan a lemezelt vastestek homogenizálásánál is bevált [32, 83, 96, 97].

⁶ A HTS tekercs hőtani modelljére hasonló megoldással él [36] és [73].



3.4. ábra. (a) A tekercs gerjesztőköre a Faraday-törvény felírásához. (b) A homogenizált modellhez rendelt peremérték-feladat vázlata.

alkotnak (pl. a menetszintű, 2D keresztmetszeti modellben), akkor a fentebb vizsgált menet-áramkényszer is értelmezhető (triviális) külső hálózati csatolásként. A kérdéskört részletesen tárgyalja [95] – igaz, nem a végeelem hanem a véges integrálok módszerére – ahol a szerzők a szóban forgó feszültség-áram kényszereket *winding function* néven általánosítják.

Az I áram kifejezését már tárgyaltuk; következzen most a feszültség. Írjuk fel a Faraday-törvényt a 3.4/a. ábra áramkörére:

$$\oint_{C \cup C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{c} = -\frac{d}{dt} \int_{S \cup S_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.25)$$

Az ábrán C az 1-2 végpontok között, a vezetőszalagon belül haladó tetszőleges görbe, míg C_0 a generátornak az Ω modelltartományon kívül eső, *idealizált* hozzávezetései képviseli. Hasonlóan, S és S_0 a $C \cup C_0$ zárt görbe által kifeszített felület Ω -n belüli, illetve kívüli részét jelöli. Az említett idealizálás nem csak azt jelenti, hogy a hozzávezetések ellenállása elhanyagolható (az figyelembe vehető a generátor modelljében is), hanem hogy a modelltartományon kívül nem lép fel számottevő indukálási jelenség. Ennek következtében \mathbf{E} vonalintegrálja a C_0 görbeszakaszra éppen az U feszültséggel egyenlő, amely így kifejezhető a (3.25) egyenletből:

$$U = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{c} + \frac{d}{dt} \int_{S \cup S_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.26)$$

Az \mathbf{A} - V módszer esetében (3.1.1. szakasz) a fluxus kifejezhető a vektorpotenciállal:

$$\int_{S \cup S_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S \cup S_0} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C \cup C_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{c} \approx \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{c}, \quad (3.27)$$

ahol (3.7) mellett felhasználtuk a Stokes-tételt, valamint éltünk az imént taglalt közelítéssel. Ez-

zel, valamint (3.8) behelyettesítésével a feszültség (3.26) kifejezése így alakul:

$$U = \int_C \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V \right) \cdot d\mathbf{c} + \frac{d}{dt} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{c} = \int_C -\nabla V \cdot d\mathbf{c} = V_2 - V_1. \quad (3.28)$$

Ennek során felcseréltük az idő szerinti deriválást a hely szerinti integrálással, majd az egyszerűsítést követően alkalmaztuk a gradienstételt. Végül azt kaptuk, hogy a tekercs kapocsfeszültsége egyszerűen a skalárpotenciál végponti értékeinek különbségével egyenlő.

A \mathbf{H} -módszernél viszont (3.4)-(3.5) és (3.13) helyettesíthető a (3.26)-ba, amellyel

$$U \approx \int_C \rho \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{c} + \frac{d}{dt} \int_S \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.29)$$

Összevetve az I áram megfelelő formuláival látszik, hogy az \mathbf{A} - V módszernél a feszültség, míg a \mathbf{H} -módszernél az áram fejezhető ki lényegesen egyszerűbben. A hagyományos, „hengeresen” homogenizált modellben (3.2/c. ábra) azonban mindez bonyolultabb:

- Az \mathbf{A} - V módszer (3.28) képlete azért nem használható, mert a tekercs végpontjai ebben a modellben egyáltalán nem jelennek meg. Egy lehetséges megoldás, hogy a tekercs valamely keresztmetszetében felvesznek egy \bar{S} átmeneti felületet, amelyen a V skalárpotenciál ugrást szenvedhet (ezt a potenciálelméletben *kettősrétegnek* nevezik [98]). Változónak pedig a térfogati eloszlású V skalárpotenciál helyett az utóbbi ugrása, azaz ΔV eloszlását tekintik az \bar{S} felület mentén. Figyelembe véve ΔV közelítőleg egydimenziós, tisztán radiális irányú változását, a tekercs kapocsfeszültsége a 3.2/c. ábra hengerkoordináta-rendszerében így fejezhető ki [29, 31]:

$$U = \frac{N}{r_k - r_b} \int_{r_b}^{r_k} \Delta V(r) dr. \quad (3.30)$$

- Ugyancsak nem része a homogenizált modellnek a \mathbf{H} -módszer (3.29) képletében szereplő C görbe, illetve S felület. Bár a képlet elvileg kiértékelhető a 3.2/c. ábra virtuális meneteire, az lényegében kettős integrálokra vezetne.⁷

3.2. Célkitűzés

A szakirodalomban tudomásunk szerint nem található olyan homogenizálási eljárás, amely figyelembe venné a tekercsek *spirális* jellegű geometriát. Az ismert megoldásokban a (3.24)-hez hasonló vezetőképesség-tenzorok lényegében olyan kötegelt vezetőknek felelnek meg, amelyben a szalagok egymástól független, zárt hurkokat alkotnak. Ezekben a tekercs kapocsfeszültsége nehezen értelmezhető, az áram előírása pedig technikai nehézséget jelent.

⁷ A \mathbf{H} -módszert alkalmazók körében elterjedtek az ennél jóval egyszerűbb, de sajnos *hibás* formulák a tekercsfeszültség számítására (lásd pl. [2, 120]). Egyébként is, a HTS tekercsmodellezés szakirodalmát olvasva az az érzésünk, mintha a bonyolult, nemlineáris és csatolt jelenségek vizsgálata mellett erre a látszólag egyszerű (valójában megfontolást igénylő) részterületre már nem jutott volna kellő figyelem.

Célunk olyan homogenizálási módszer kidolgozása volt, amely elősegíti a nagy méretű fólia-ill. szalagtekercsek 3D modelljeinek hatékony számítását, és kiküszöböli a fent említett problémákat. Ennek alapját egy olyan ekvivalens, anizotrop vezetőképesség-tenzor képezi, amelynek főirányai illeszkednek a spirális pályához. Így nem csupán a menetáramkényszer jut érvényre automatikusan, de a feltekercselt szalag két végpontja (kapcsa) is megjelenik virtuálisan a modellben. Mivel a kapocsfeszültség által indított áramot az anizotrop vezetőképesség a megfelelő spirális pályára tereli, ezért a feszültségkényszer közvetlenül alkalmazható. A peremérték-feladat megfogalmazására az $A-V, A$ formalizmust (az $A-V$ redukált változatát) választjuk, mert abban a feszültségkényszer különösen egyszerűen előírható (lásd 3.1.3. szakasz). A diszkrétizálásra – részben a rendelkezésre álló szoftver korlátai miatt – csomóponti változójú (nodális) végelemeket használunk (ám ebből a szükségből erényt kovácsolunk).

E kutatómunkával viszonylag járatlan területen mozgunk, nem csupán az újfajta homogenizálás, de a keretét képező formalizmus és a végelem-implementáció tekintetében is, mivel effajta kombinációjukra a szakirodalomban alig van példa és tapasztalat. Emiatt a homogenizált modell numerikus viselkedését (konvergenciáját és pontosságát) először lineáris problémán: egy rézszalag-tekercs árameloszlásán teszteltük. Csak ennek sikerét követően vizsgáltuk egy erősen nemlineáris HTS szalagtekercs működését, és szimuláltuk annak kritikus állapotát.

Végül megjegyezzük, hogy bár a publikációink e témában viszonylag frissnek mondhatók [48, 49, 66], azok részben kapcsolódnak a 2000-es évek elején végzett, lemezelt vastestek örvényáram-vesztésével foglalkozó, közös tanszéki kutatómunkánkhoz [83, 96, 97].

3.3. Ekvivalens vezetőképesség-tenzor

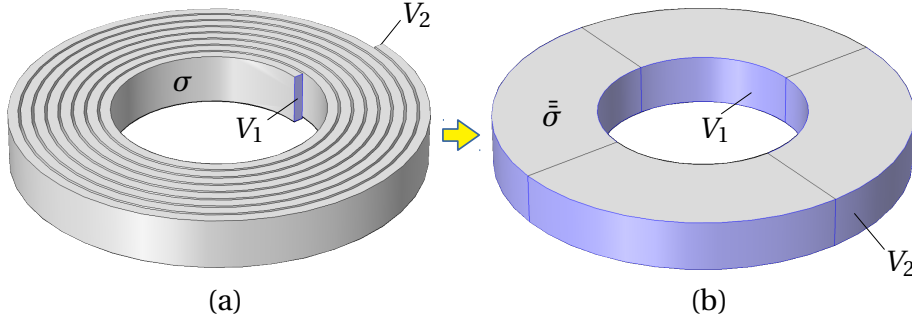
A sűrűn csévelt spiráltekercset egy olyan, vele kb. azonos méretű, tömör (homogén), középen lyukas koronggal helyettesítjük (3.5. ábra), amelynek árameloszlása adott gerjesztésre közelítőleg megegyezik az eredeti tekercsével. Ennek megvalósítása az anizotrop $\bar{\sigma}$ vezetőképesség-tenzor segítségével történik, amellyel a (3.5) konstitúciós egyenlet

$$\mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E} \quad (3.31)$$

alakú. A 3.5. ábra alapján logikusnak tűnik, hogy a tekercsvégeken a szalag keresztmetszeti felületei a homogenizált modellben kiterjesztendők a teljes Γ_k külső, illetve Γ_b belső hengerpalástokra (vö. 3.4/b. ábra). A gerjesztést tehát – legyen az áram vagy feszültség – ezeken a felületeken célszerű előírni (lásd 3.4.2. szakasz).

3.3.1. Hengerszimmetrikus homogenizálás

Induljunk ki $\bar{\sigma}$ általánosan használt (3.24) alakjából. Nyilvánvaló, hogy a Γ_k - Γ_b palástokra feszültséget kapcsolva áram közöttük nem folya, mivel ez a vezetőképesség-tenzor nem teszi lehetővé a sugárirányú töltésáramlást. Ezért – első próbálkozásként – a diagonális alakot meg-



3.5. ábra. A homogenizálás alapgondolata: az eredeti spiráltekercs (a), és homogenizált modellje (b).

tartva, intuitív úton megállapítunk egy véges σ_{rr} értéket. Tekintsünk egyetlen menetet, amelynek közepes sugara r . A menet egyenáramú ellenállása

$$R_1 \approx \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi r}{hw}. \quad (3.32)$$

A töltéshordozók minden teljes menet megtétele után – eredőben – p távolságra jutnak radiális irányban, amely akár tulajdonítható egy hipotetikus sugárirányú σ_{rr} vezetőképességnek is (lásd 3.6. ábra). A megfelelő ellenállás egy menetemelkedésnyi (p) távolságra vonatkozóan

$$R_p \approx \frac{1}{\sigma_{rr}} \frac{p}{h2\pi r}. \quad (3.33)$$

A két ellenállást egyenlővé téve σ_{rr} kifejezhető:

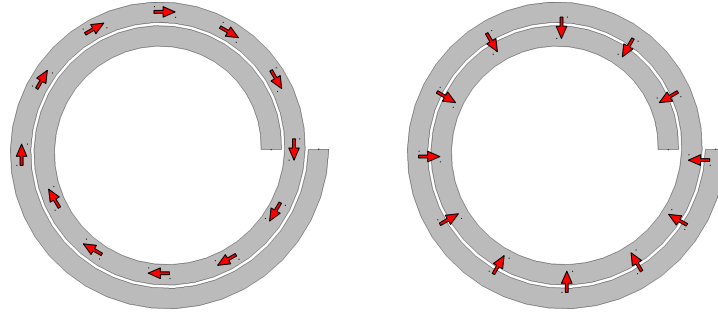
$$\sigma_{rr} = \sigma \frac{wp}{4\pi^2 r^2} = \sigma \chi \left(\frac{p}{2\pi r} \right)^2, \quad (3.34)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\chi = w/p$. Ezzel a keresett tenzoralak:

$$\bar{\sigma}_{(r\phi z)} = \sigma \chi \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{2\pi r} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Amint látható, a homogenizált vezetőképesség valójában „enyhén inhomogén”, mivel a sugár függvényében változik, jóllehet csak a szalagvastagságnál sokkal nagyobb méretskálán nézve. Megfigyelhető, hogy a radiális diagonálem négyzetesen függ a menetemelkedés és a sugár (p/r) arányától. Ez az arány például a HTS tekercseknél nagyságrendileg 10^{-3} , ill. 10^{-4} körüli, tehát $\sigma_{rr}/(\sigma\chi) \sim 10^{-6}$ ill. 10^{-8} . Ez a többi diagonálemhez képest igen kis érték, amely a numerikus számításnál pontatlansághoz vezethet; a kérdésre a 3.5.2. szakaszban visszatérünk.

Sejthető, hogy ez az intuitív modell több szempontból nem kielégítő, és ezt a 3.5.1. szakaszban bemutatott számítások igazolják is: bár a hengerpalástokra feszültséget kapcsolva, az eredő áramból a tekercs egyenáramú ellenállása meglepően pontosan kiadódik, a hengerszimmetriá-



3.6. ábra. Illusztráció: a spirális áram – eredőben – sugárirányú töltésmozgásnak felel meg.

ból adódó, tisztán sugárirányú áram egészen másmilyen mágneses teret hoz létre, mint a spirálpályán haladó. Mindazonáltal ez a fajta homogenizálás még alkalmas lehet a hőtani modellezésre, ott ugyanis az elektromos árammal analóg hőáramlásra nem épül további fizikai mező. A szakirodalomban található, tisztán hengerszimmetriára alapozott hővezetési tenzoroknál [36, 73] az itt bemutatott, korrigált alak azzal tud többet nyújtani, hogy a szalagra merőleges irányú hőterjedéshez hozzáteszi a szalagirányú hőterjedés radiális járulékát is.

3.3.2. Spirál menti homogenizálás

Induljunk el most más úton. A spirálszalag bármely pontján felvehető egy olyan lokális derékszögű $(\xi\eta z)$ koordináta-rendszer, amelyben ξ a szalagra merőleges irányú, η pedig a szalag menetirányában érintőleges (lásd a 3.3. ábrán; az ott nem szereplő z tengely az ábra síkjából kifelé mutat). Ideális szigetelést feltételezve a vezetőképesség-tenzor ebben a koordináta-rendszerben a (3.24)-hez hasonló, triviális alakú diagonálmátrix:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{(\xi\eta z)} = \bar{\bar{\sigma}}_{\xi\eta z} = \sigma \chi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

ahol a tenzor adott reprezentációjára egyszerű jelölést vezettünk be. Transzformáljuk a tenzort a globális hengerkoordináta-rendszerbe, amely lényegében egy α szögű forgatást jelent (vö. 3.3. ábra). Az infinitezimális koordinátaelmozdulásokra felírható ugyanis, hogy

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \equiv \mathbf{Q} \begin{pmatrix} dr \\ r d\varphi \\ dz \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

A 3.3. ábra jobb oldalán felrajzolt derékszögű háromszögből belátható, hogy

$$\tan \alpha = \frac{d\varphi \frac{p}{2\pi}}{r d\varphi} = \frac{p}{2\pi r}, \quad (3.38)$$

továbbá a gyakorlatban megjelenő igen kicsiny α szögekre használható a $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, illetve a $\tan \alpha \approx \alpha$ közelítés. Figyelembe véve ezeket a (3.37)-(3.38) egyenletekben, a tenzor hengerkoordináta-reprezentációja:

$$\bar{\sigma}_{r\varphi z} = \mathbf{Q}^{-1} \bar{\sigma}_{\xi\eta z} \mathbf{Q} = \sigma \chi \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{2\pi r}\right)^2 & -\frac{p}{2\pi r} & 0 \\ -\frac{p}{2\pi r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Megfigyelhető, hogy a tenzor σ_{rr} eleme pontosan megegyezik az előző szakaszban a (3.35) hengerszimmetrikus alakhoz heurisztikusan bevezetett tenzorkomponenssel, egyúttal azonban megjelennek főátlón kívüli, nem nulla elemek is, amelyek a már említett p/r mennyiséggel (és nem annak négyzetével) arányosak. Amint a 3.5.1. szakaszban látni fogjuk, ezzel a tenzorral a homogenizált modell már jól közelíti a spirálszalagtekercs áramlási terét, és az általa keltett mágneses tér is megfelelő.

3.4. Kvázi-stacionárius (A - V , A) módszer

Az alábbiakban egyszerű elrendezést vizsgálunk, de a tárgyalás nyilvánvalóan általánosabb érvényű. A 3.4/b. ábrán vázolt háromdimenziós Ω modelltartományt felosztjuk a tekercs Ω_c ($c = \text{conductive}$) és a környező levegő Ω_n ($n = \text{non-conductive}$) résztartományára. Mágneses anyag nincs jelen, tehát a teljes tartományon $\mu = \mu_0$ érvényes. A nevezett két tartomány határfelülete $\Gamma_{cn} = \Gamma_b \cup \Gamma_k \cup \Gamma_a \cup \Gamma_f$. A modelltartomány külső pereme, Γ_∞ az ún. „távoli” lezárás.

Az A vektorpotenciált a (3.7) egyenlettel vezetjük be, és a teljes Ω tartományon értelmezzük, míg a (3.8)-ban szereplő skalárpotenciált csak az Ω_c vezető tartományon vesszük fel. Ennek célja az ismeretlenek számának csökkentése mellett elsősorban a gerjesztés előírása. A szakirodalom ezt a redukált változatot A - V , A formalizmus néven ismeri [19, 70]. Az egyenleteket az idézett források alapján, ám rögtön az adott problémára adaptálva ismertetjük, melynek során különös figyelmet szentelünk a határ- és peremfeltételeknek.

3.4.1. PDE és peremfeltételek

A 3.1.1. szakasz szerint – Coulomb-mérték alkalmazásával – a vezető tartományon a

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times v_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla v_0 \nabla \cdot \mathbf{A} + \bar{\sigma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \bar{\sigma} \nabla V &= 0 \\ \nabla \cdot \left(-\bar{\sigma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \bar{\sigma} \nabla V \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Omega_c\text{-re} \quad (3.40)$$

parciális differenciálegyenletek érvényesek (itt $v_0 = 1/\mu_0$), míg a nem vezető tartományon a

$$\nabla \times v_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla v_0 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Omega_n\text{-re} \quad (3.41)$$

egyenlet él. Feltesszük, hogy a távoli peremen fluxus nem lép ki, amelyet szokás szerint az

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{\infty}\text{-re} \quad (3.42)$$

peremfeltétellel írunk elő (\mathbf{n} a felületi normálist jelöli). A (3.10) Coulomb-mértékkel való kompatibilitás azonban megkívánja ugyanott az

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \Gamma_{\infty}\text{-re} \quad (3.43)$$

teljesülését is. A két utóbbit egyesítve az

$$\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{\infty}\text{-re} \quad (3.44)$$

peremfeltétel adódik. Ne feledjük, hogy a V skalárpotenciált hordozó Ω_c szempontjából Γ_{cn} is külső peremnek számít, amely éppen ezért megfelelő peremfeltételeket kíván. A hengeres tekercs alsó és felső fedőlapjain, vagyis a Γ_a és Γ_f felületeken (vö. 3.4/b. ábra) az áram nyilvánvalóan nem léphet ki, ezért ott (3.19) alapján

$$\left(-\bar{\sigma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \bar{\sigma} \nabla V \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Gamma_a\text{-ra és } \Gamma_f\text{-re} \quad (3.45)$$

érvényes. A fennmaradó Γ_b és Γ_k hengerpalástok viszont éppenséggel a virtuális árambevezetés, illetve -kivezetés helyei a modellben, amelyeken a gerjesztést írjuk elő; ennek módját külön tárgyaljuk a következő szakaszban.

A Γ_{cn} határfelületen biztosítani kell a mágneses vektormezők megfelelő folytonosságát. \mathbf{B} normális, illetve \mathbf{H} tangenciális komponensének folytonos átmenetét az

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{A}] = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{cn}\text{-re, ill.} \quad (3.46)$$

$$[\nu_0 \nabla \times \mathbf{A} \times \mathbf{n}] = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{cn}\text{-re} \quad (3.47)$$

egyenletek fejezik ki a vektorpotenciállal, amelyekben $[\cdot]$ az adott mennyiség ugrását jelöli. A Coulomb-mérték ezen felül megkívánja még az

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}] = 0, \quad \Gamma_{cn}\text{-re, és a} \quad (3.48)$$

$$[\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}] = 0, \quad \Gamma_{cn}\text{-re} \quad (3.49)$$

határfeltételek teljesülését is [19]. A fentiek közül (3.46) és (3.48) összevonható így:

$$[\mathbf{A}] = \mathbf{0}, \quad \Gamma_{cn}\text{-re.} \quad (3.50)$$

Végül, mivel a (3.40) differenciálegyenletekben \mathbf{A} időbeli első deriváltja szerepel, a megoldáshoz *kezdeti feltétel* is szükséges. A legegyszerűbb esetben, *bekapcsolási* folyamatnál a rendszer

kezdeti energiamentességét az alábbi feltétel reprezentálja:

$$A(0) = \mathbf{0}, \quad \text{a teljes } \Omega\text{-ra.} \quad (3.51)$$

3.4.2. Hálózati egyenletek és gerjesztés

A 3.1.3. szakasz (3.28) eredménye szerint a tekercs kapocsfeszültsége:

$$U = V_2 - V_1. \quad (3.52)$$

Ugyanakkor a 3.5. ábra szerint a tekercs kapcsait a homogenizált modellben a Γ_b és Γ_k felületek képviselik. Mivel a V skalárpotenciált a (3.8) implicit definíció egy konstans erejéig határozatlanul hagyja, ezért a *feszültség* – célszerűen – az alábbi peremfeltétel-párral reprezentálható:

$$V = 0, \quad \Gamma_b\text{-re,} \quad (3.53)$$

$$V = U, \quad \Gamma_k\text{-ra.} \quad (3.54)$$

Az *áram* előállítása történhet a (3.22) szerinti, keresztmetszeti integrállal (vö. 3.2/c. ábra):

$$I = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{r_b}^{r_k} J_\varphi \, dr \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{r_b}^{r_k} \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) dr \, dz, \quad (3.55)$$

de annak köszönhetően, hogy ebben a modellben „hozzáférünk” a tekercskivezetésekhez, az *összáram* elvileg a palástra vett integrálként is megadható. Például a külső palástra:

$$-I = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_0^{2\pi} J_r r_k \, d\varphi \, dz = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) r_k \, d\varphi \, dz. \quad (3.56)$$

Azonban hozzátesszük, hogy mivel az áramsűrűség-vektor általában igen kis α szöget zár be a palástartal, az arra merőleges, radiális komponense viszonylag pontatlanul értékelhető ki a végelem-modellben, tehát (3.55) használata numerikus szempontból előnyösebb lehet.

A gerjesztés implementálására két elvi lehetőséget mutatunk be:

- *Feszültségkényszer* esetén az $U = U(t)$ kapocsfeszültség-időfüggvényt írjuk elő a (3.53)-(3.54) peremfeltételekkel, majd a megoldást követően kiértékeljük az $I(t)$ áramot a (3.55) vagy a (3.56) integrállal.
- *Áramkényszer* esetén (3.55) vagy (3.56) alakjában integrálfeltételt adunk, továbbá előírjuk a (3.53)-(3.54) peremfeltételeket. Azonban az utóbbiban U értékét ismeretlennek tekintjük, amely a megoldásból automatikusan kiadódik.

A kettő közül technikailag messze könnyebbnek tűnik a feszültségkényszer alkalmazása. Megjegyezzük azonban, hogy a „spirálisan anizotrop” vezetőképesség-tenzor használatával még az áramkényszer megvalósítása is egyszerűbbé válik, mint a szakirodalombeli megoldások, nem

kell ugyanis külön gondoskodnunk a menetáramok egyenlőségéről. Természetesen a fenti feltételek kombinálásával általános *generátoregyenlet* is leképezhető a modellben, de ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk.

3.4.3. Végeselemes implementáció

A háromdimenziós MQS problémák A - V módszerrel történő végeselemes számításában köztudottan előnyös a vektorpotenciált élváltozójú vektorelemekkel (ún. *edge*-elemekkel) diszkrétizálni, míg a skalárpotenciálra a hagyományosnak mondható, csomóponti változójú (nodális) elemeket használni. Ezáltal ugyanis a mágneses mezők folytonossági feltételei az eltérő permeabilitású közegek határfelületén természetesebb módon írhatók elő, másrészt ezzel lehetővé válik a mértékválasztás nélküli formalizmus, amely iteratív megoldókkal gyors konvergenciát biztosít [18, 75]. Az általam használt Comsol Multiphysics® 5.2 szoftver AC/DC moduljában mindez elvileg elérhető, hovatovább alapértelmezett [25], azonban *időtartománybeli* (tranzien) analízis esetén sajnos nem kombinálható olyan közegmodellel, amely *egyszerre* anizotrop és nemlineáris tulajdonságú.⁸

E technikai akadály miatt döntöttünk úgy, hogy a Comsol alacsonyabb szintű, „Equation-based Modeling” környezetét használjuk [26]. Ez egyfelől jóval kényelmesebb, mert ott nem érhetők el az AC/DC modulba beépített, problémaspecifikus megoldások, továbbá csak nodális végeselemek használhatók. Másfelől viszont az implementáció messzemenően rugalmasabb, és jobban kézben tartható. Esetünkben a csomóponti változók sem jelentenek igazán gondot, mivel a tartományban nincsenek eltérő permeabilitású közegek [75]. Ráadásul, a Coulomb-mérték, valamint a 3.4.1. szakaszban leírt A - V , A formalizmus egyes peremfeltételeinek előírása kifejezetten könnyebb nodális, mint *edge*-elemekkel.

A végeselemek alakjára szerencsére nincs korlátozás, és a polinomiális formafüggvények fokszáma is tág határok között változtatható. A homogenizált modell viszonylag kis elemszáma, valamint a mérték előírása lehetővé teszi akár ún. direkt megoldó használatát a diszkrétizálásból adódó, lineáris, algebrai egyenletrendszerre, amely különösen a nemlineáris iterációba ágyazva hatékony. Megemlítendő, hogy feszültségkényszer mellett nincs szükség gyenge alakban megadott kényszerekre, amely általában jobban kondicionált együtthatómátrixra vezet.

3.5. Lineáris, stacionárius tesztfeladatok

Bár a szóban forgó módszer legfontosabb alkalmazása jelenleg a szupravezető tekercs tranzien (időtartománybeli) számítása, a tesztelést mégis egy lineáris réztekercs stacionárius (állandósult) állapotán kezdjük, mivel ennek fizikai működése jóval egyszerűbb és átláthatóbb. Először egy kis menetszámú tekercset vizsgálunk, amellyel a homogenizált modell fizikai képének helyességét ellenőrizzük, összevetve azt a részletes, menetszinten diszkrétizált modell eredmé-

⁸ Bár a HTS tekercs modellezésére – sokoldalúsága és flexibilitása miatt – szinte kizárólag az említett szoftvert használják, a szakirodalomban ez a speciális kombináció eddig még nem fordult elő.

nyeivel. A második lépésben a módszer pontosságát és konvergenciáját vizsgáljuk a diszkretizálás függvényében, egy valamivel nagyobb menetszámú, realisztikus tekercsen.

3.5.1. A részletes és a homogenizált modell összevetése

Tekintsünk egy $r_b = 10$ mm belső és $r_k = 20$ mm külső sugarú, $h = 5$ mm magas, $N = 8$ menetből álló réz ($\sigma = 57$ MS/m) szalagtekercset, melynek szalagvastagsága $w = 1$ mm (vö. 3.2. ábra). Ebből (3.17) alapján a menetemelkedés $p = 1,25$ mm, a kitöltési tényező $\chi = 0,8$, és a szalag hossza $l \approx 754$ mm. A tekercs méretarányos képe a 3.5/a. ábrán látható. A feladat az $U = 1$ V állandó kapcsolófeszültség mellett létrejövő árameloszlás és mágneses tér meghatározása.

A részletes geometriájú tekercsmodell mellett kétféle homogenizált modellt is megvizsgálunk (lásd 3.5/b. ábra): az egyiknél a hengersizmetrikusan homogenizált (3.35), míg a másikonál a spirálisan homogenizált (3.39) vezetőképesség-tenzort alkalmazzuk. A számításokat a Comsol Multiphysics® végeelem-program AC/DC moduljával végeztük [25]. A teljes modell-tartományon strukturálatlan (*free*) tetraéderhálót generáltunk, és kvadrátikus formafüggvényeket használtunk.

Integrális jellemzők, erőforrásigény

A modelleket először a tekercs integrális jellemzőin – egyenáramú ellenállásán és induktivitásán – keresztül hasonlítjuk össze. Nagyságrendi becsléshez célszerű analitikus formulákat is igénybe venni: az ellenállásra

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{hw} \quad (3.57)$$

igen pontos eredményt ad, míg az induktivitás becslésére a lapos spiráltekercsre vonatkozó Wheeler-képlet [117] módosított alakját használhatjuk:

$$L \approx 31,33 \mu_0 N^2 \frac{\bar{r}^2}{8\bar{r} + 11(r_k - r_b)}, \quad \bar{r} = \frac{r_b + r_k}{2}. \quad (3.58)$$

Az eredményeket a 3.1. táblázatban foglaltuk össze. Az ellenállásra mindhárom modell közel azonos értéket ad, amely ráadásul az analitikusan számolttal is egyezik. Az induktivitásra nagyobb különbségek adódnak. E tekintetben a menetszinten diszkretizált FEM modellt vehetjük referenciának; a spirálisan homogenizált FEM modell eredménye ettől alig tér el. Az analitikus formula már kevésbé pontos, de ne feledjük, hogy az lapos spiráltekercsre, nem pedig szalagtekercsre vonatkozik. Viszont a hengeresen homogenizált modell öt nagyságrenddel kisebb értéket ad, mint a többi, amelynek alapvető oka az abnormális árameloszlás (lásd alább).

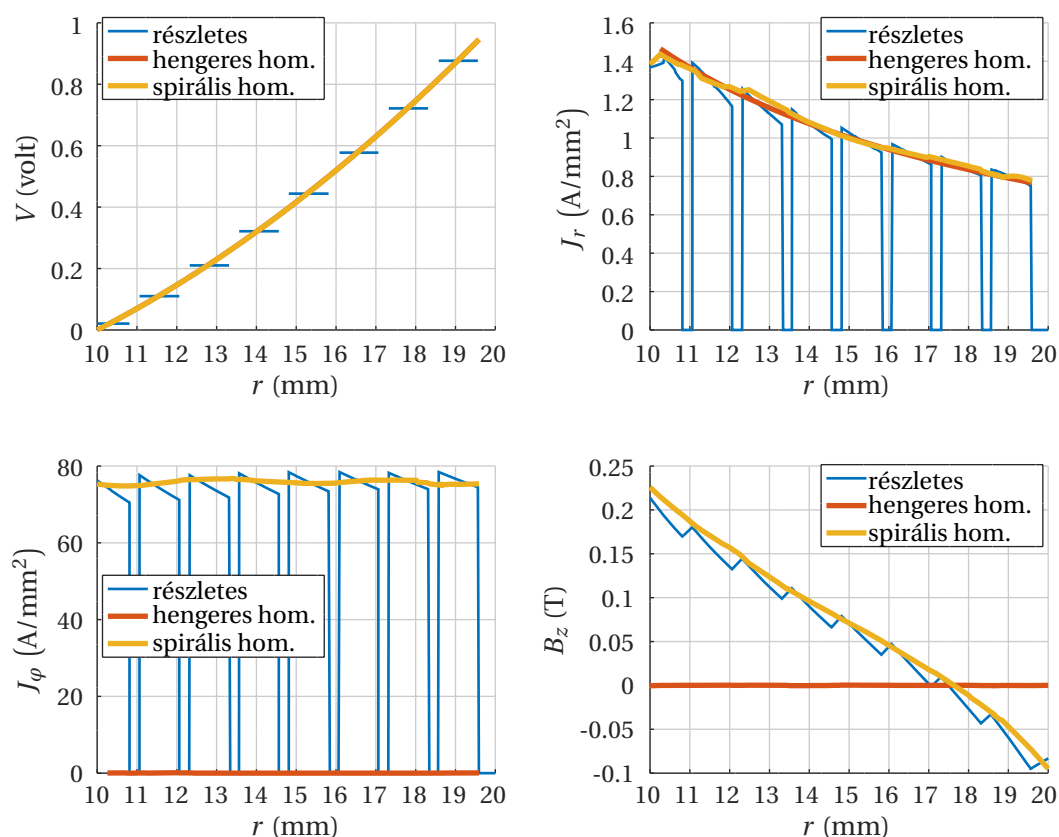
A 3.1. táblázatban feltüntettük a számítások erőforrásigényét jellemző paramétereket is: a szabadsági fokok számát, valamint a futásidőt (i7 típusú asztali számítógépen). Látható, hogy a homogenizálás révén jelentős megtakarítást értünk el. Ez az előny még tovább növelhető a feladathoz jobban illeszkedő végeelemháló használatával (lásd 3.5.2. szakasz).

3.1. táblázat. Számított integrális jellemzők, és a számítás erőforrásigénye

Modell	Ellenállás (mΩ)	Induktivitás (μH)	DoF	Futásidő (sec)
Analitikus közelítő formulák	2,646	2,464	–	–
Menetszinten diszkrétizált FEM	2,645	1,875	3 787 582	785
Hengeresen homogenizált FEM	2,647	$\approx 5 \cdot 10^{-5}$	216 341	124
Spirálisan homogenizált FEM	2,647	1,944	372 132	129

Mezőeloszlások

Az integrális jellemzők után a különböző modellekkel számított mezők eloszlását hasonlítjuk össze. A 3.7. ábrán négy kiválasztott térkomponens, V , J_r , J_φ és B_z sugárirányú változását ábrázoltuk a tekercs $z = 0$ felező síkjában, a $\varphi = 0$ keresztmetszetben. A mintavétel helyét a 3.8. ábrán piros vonal jelzi; belátható, hogy a szimmetria miatt e vonal mentén a többi térkomponens (J_z , B_r és B_φ) zérus. Az összehasonlíthatóság érdekében a homogenizált modellek áramsűrűség-értékeit korrigáltuk a kitöltési tényezővel, vagyis a J_r/χ ill. J_φ/χ mennyiségeket ábrázoltuk.



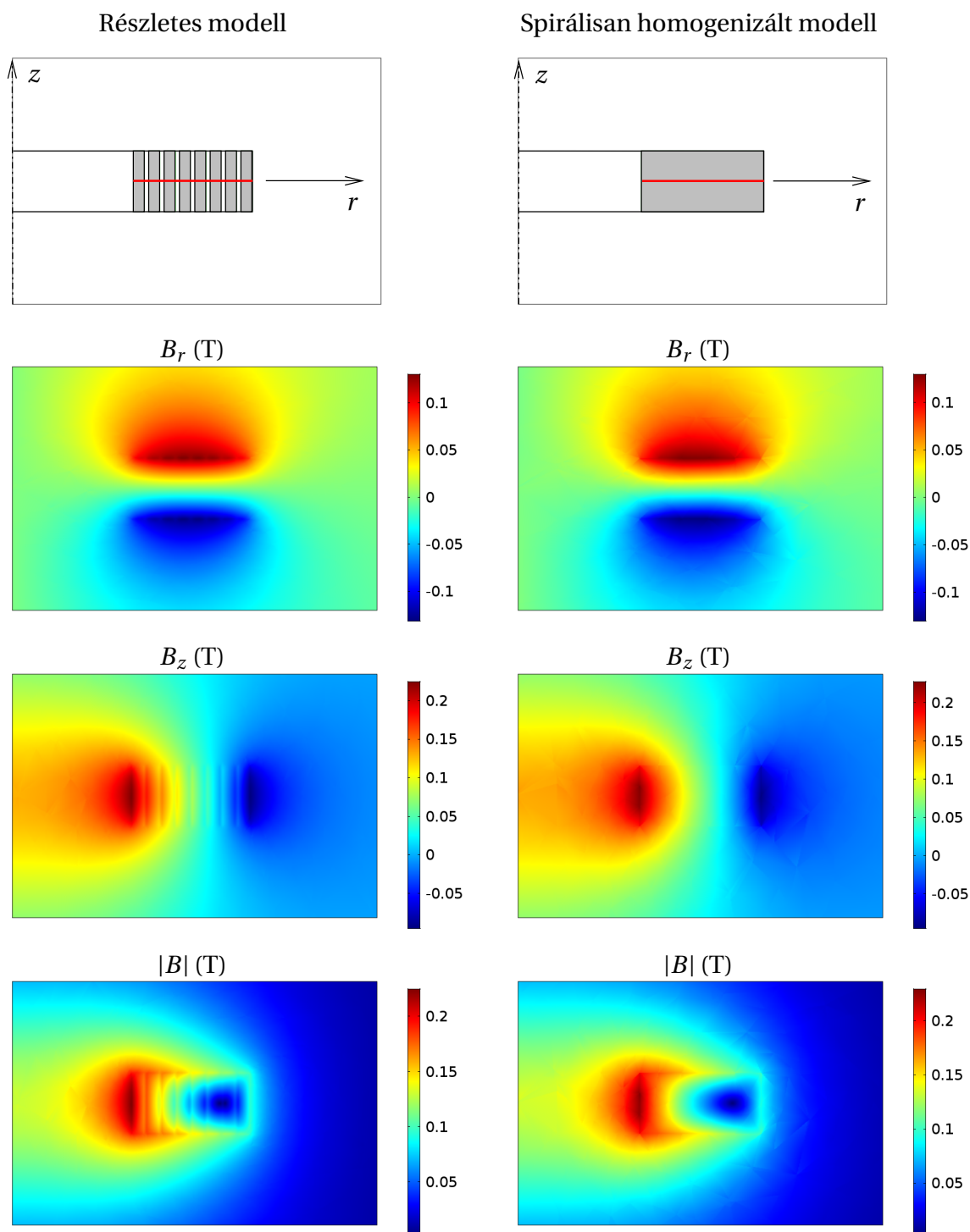
3.7. ábra. Térkomponensek sugárirányú változása a tekercsben, három különböző végelelem-moddellel számolva.

A diagramok tanúsága szerint a V skalárpotenciál, valamint a J_r áramsűrűség-komponens „lépcsőzetes” változását mindkét homogenizált modell jól közelíti egyfajta *átlagolással*, az elvárásnak megfelelően. Azonban J_φ és B_z esetében csak a spirálisan homogenizált modell ad elfogadható eredményt. A hengeresen homogenizált modell alapvető problémája, hogy benne az áram a két palást között tisztán sugárirányban folyik ($J_\varphi = 0$), ebből következően $B_r = 0$, és $B_z = 0$ a teljes Ω tartományon. Megjegyezzük, hogy az indukció φ irányú komponense nem azonosan nulla, de igen kis értékű, ezért nem is ábrázoltuk. Végző soron tehát a hengeresen homogenizált modellt a hibás fizikai képe okán elvetjük, és a továbbiakban csak a spirálisan homogenizálttal foglalkozunk; utóbbit egyszerűen „homogenizált” modellnek nevezzük.

A 3.8. ábrán a részletes geometriájú, illetve a homogenizált végeelem-moddellel számolt mágneses terek összehasonlítása látható, ahol a mágneses indukció egyes komponenseit, illetve abszolút értékét ábrázoltuk a tekercs keresztmetszetében. A B_r és B_z komponensek esetében igen jó egyezést kapunk, eltekintve attól, hogy a részletes modellben a menetek által keltett kis fluktuációk a homogenizált modellben nyilvánvalóan nem jelennek meg. Megemlítjük, hogy a spirális árampályák miatt a mágneses térnek csekély, mintegy két nagyságrenddel kisebb φ irányú komponense is van. Ezt mindkét modell viszonylag nagy numerikus hibával, de *jellegre* és *nagyságra* nézve hasonlóan adja vissza (az ábrán nem látható).

3.5.2. A módszer pontossága és korlátai

A végeelemes számítás pontosságát alapvetően a diszkretizálás módja határozza meg, azaz a végeelemek alakja és méreteloszlása, valamint a formafüggvények jellege. Ne feledjük, hogy a homogenizált modellben a térben változó (3.39) fajlagos vezetőképesség-tenzor lényegében *ugyanolyan* diszkretizálásnak van alávetve, mint maguk a kiszámítandó mezők. E tekintetben a tenzorban megjelenő p/r arány – amely a tekercs geometriai jellemzője – ugyancsak meghatározó lehet a pontosság szempontjából. Ha pedig a szimuláció célja valamilyen lokális jelenség (pl. HTS *quench*) kimutatása, akkor különösen fontos, hogy a homogenizált modell diszkretizálásból eredő hibája biztonsággal kisebb legyen, mint az említett jelenséget a térjellemzőkben (pl. áramsűrűségben, hőmérsékletben) megtestesítő perturbáció.



3.8. ábra. A részletes geometriájú (bal oldali oszlop) és a spirálisan homogenizált (jobb oldali oszlop) végeelem-moddellel számított mágneses terek összehasonlítása. (A felső ábrák piros vonala a 3.7. ábra diagramjainak mintavételi helyét mutatja.)

Közvetlen vizsgálat

A homogenizált végeelem-modell pontosságát továbbra is lineáris réztekercsen vizsgáljuk, de realisztikusabb geometriát választunk (vö. [120]). A tekercs belső és külső sugara $r_b = 29,5$ mm, ill. $r_k = 39,5$ mm; magassága $h = 4,35$ mm. A menetszám $N = 40$, tehát a menetemelkedés $p = 250\mu\text{m}$. A szalagvastagság $w = 90\mu\text{m}$, amellyel $\chi = 0,36$ kitöltési tényező adódik.

A Comsol-modellből ezúttal a mágneses mezőt nem, csak az $U = 1$ V kapocsfeszültség hatására létrejövő stacionárius árameloszlást számítjuk ki. Ehhez az Ω_c vezető tartományon egy arra illeszkedő, reguláris, görbevonaltú (angolul *mapped*) hexaéderhálót generálunk, mégpedig a hengerkoordináta-rendszer minden irányában egyenletesen, N_r , N_φ illetve N_z számú osztással. A számítás pontosságát e három hálópáráméter, valamint a p/r arány függvényében vizsgáljuk. Az utóbbit legjobban a tekercs tartományán előforduló minimumértéke reprezentálja:

$$q = \min_{\Omega_c} \frac{p}{r}, \quad (3.59)$$

amely a példánkban $q \approx 6,3 \cdot 10^{-3}$. A pontosság, illetve a hiba jellemzésére mindenekelőtt egy alkalmas mérőszámot kell választanunk. Belátható, hogy e speciális tesztfeladat homogenizált modelljében – a hengerszimmetria miatt – a J_φ áramsűrűség-komponens *elvileg* a teljes Ω_c tartományon konstans értékű. Ennélfogva a megoldás hibája praktikusán jellemezhető J_φ relatív statisztikai *szórásával*, amelyet ς -val jelölünk:

$$\varsigma \equiv \varsigma(N_r, N_\varphi, N_z, q) = \frac{\mathbb{D}(J_\varphi)}{\mathbb{E}(J_\varphi)}, \quad \text{ahol} \quad (3.60)$$

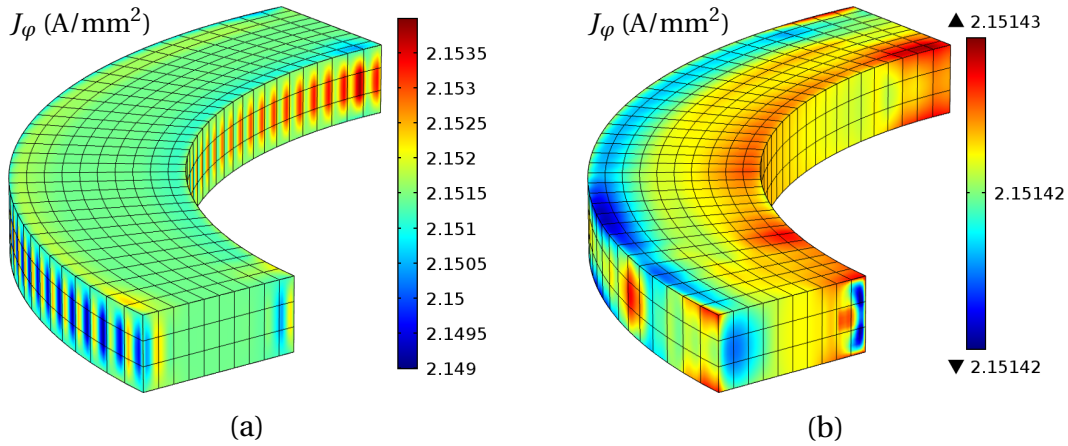
$$\mathbb{D}(J_\varphi) = \sqrt{\frac{1}{|\Omega_c|} \int_{\Omega_c} [J_\varphi - \mathbb{E}(J_\varphi)]^2 d\Omega}, \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(J_\varphi) = \frac{1}{|\Omega_c|} \int_{\Omega_c} J_\varphi d\Omega. \quad (3.61)$$

Ennek alátámasztására tekintsük a 3.9. ábrát, ahol a J_φ áramsűrűség-komponensnek a homogenizált modellel kapott eloszlását ábrázoltuk a tekercs „kivágott” negyedének felszínén, kétféle közelítésben: kvadratikusan, illetve köbös formafüggvényeket alkalmazva. A hálófelosztás mindkét esetben $N_r \times N_\varphi \times N_z = 10 \times 140 \times 3$. A színskálákon látszik, hogy J_φ a pontosság növelésével valóban állandó értékhez tart, ugyanis amíg a kvadratikusan modellben a fluktuáció kb. 0,2 %, addig a köbösben már 0,001 %-on belül van.⁹

Mivel az adott példában a szalagtekercs áramsűrűsége stacionárius állapotban a z koordináta függvényében állandó, az N_z paraméternek lényegében nincs szerepe. Ezért az utóbbit az elegendően nagy, $N_z = 4$ állandó értéken tartva, az iménti számítást kiterjesztettük a másik két paraméter, N_r és N_φ szélesebb tartományára. A formafüggvények fokszámát is változtattuk lineáristól egészen ötödfokúig bezárólag. A fokszám növelésével javul ugyan a pontosság, de az ismeretlenek száma is jelentősen megnő; a legjobb kompromisszumot kvadratikusan, illetve köbös közelítés mellett kaptuk.

A különböző sűrűségű hálókra – mind kvadratikusan, mind köbös közelítéssel – kiértékeltek

⁹ Az ábrázoláshoz felhasználtuk a Comsol® „Accurate Derivative Recovery” utófeldolgozó funkcióját [26].



3.9. ábra. Az áramsűrűség φ komponense a homogenizált végelem-modellben, kvadrátikus (a) és köbös (b) formafüggvények használata mellett.

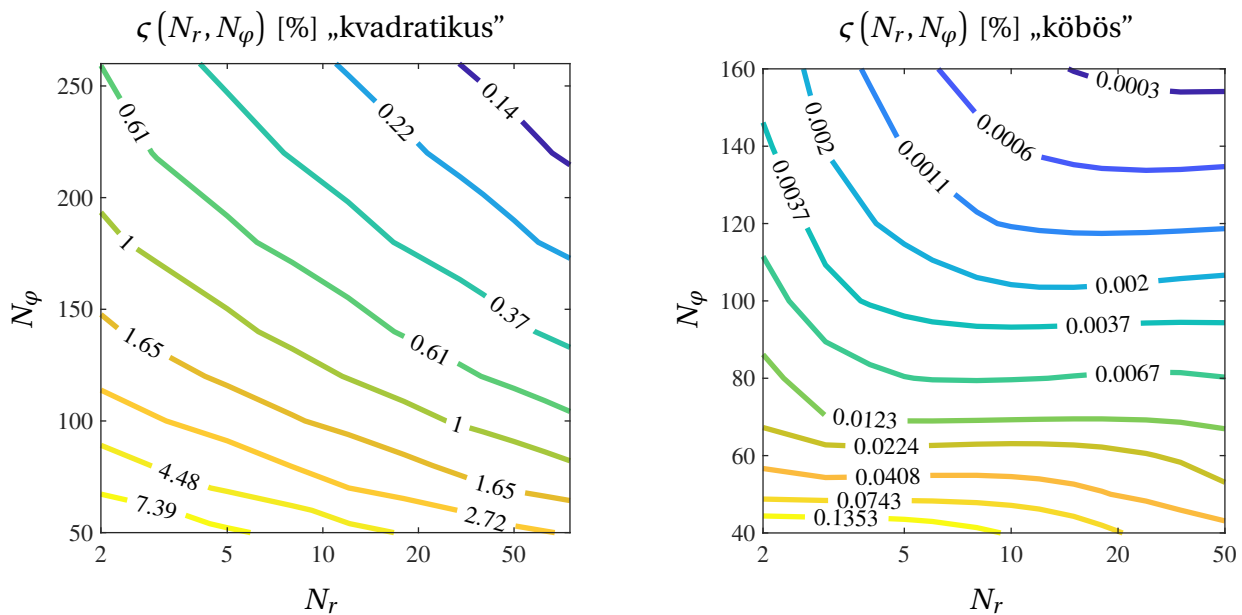
a (3.60) relatív szórását. A 3.10. ábrán $\zeta(N_r, N_\varphi)$ kétdimenziós eloszlása látható kontúrvonalakkal, amelyeken a *százalékos* értékét tüntettük fel. A diagramok tanúsága szerint a köbös közelítés – azonos hálófelosztás mellett – általában véve is nagyságrendekkel pontosabb, mint a kvadrátikus (vö. 3.9. ábra). A hiba (azaz J_φ szórása) N_φ növelésével viszonylag gyorsan csökken, de ennek oka feltehetőleg nem a homogenizálás tényében, hanem inkább a tekercs görbületében keresendő. N_r növelésével a hiba ugyan lassabban csökken – ezért választottunk hozzá logaritmikus skálát – viszont már $N_r \ll N$ esetén is kellő pontosságot érhetünk el.

Statisztikai alapú vizsgálat

A homogenizálás paraméterérzékenység-vizsgálatába a hálófelosztás mellett bevonhatók további paraméterek, például a tekercs geometriai jellemzői (belső, ill. külső sugár, szalagvastagság, stb.). Azonban ezek *együttes* vizsgálata az imént bemutatott közvetlen, „kimerítéses” technikával nem végezhető el gazdaságosan a többdimenziós paraméterter miatt. Ekkor jutnak szerephez a statisztikai alapú megoldások.

A paraméterérzékenység jellemzésére korábban sikerrel alkalmaztuk az ún. *Sobol-indexeket* többek között a roncsolásmentes anyagvizsgálat [113] és a vezeték nélküli energiaátvitel területén [10]. A Sobol-indexek olyan statisztikailag meghatározott százalékos értékek, amelyek a paraméterek különálló, illetve együttes hatásának súlyát adják meg az adott kimeneti jellemzőre vonatkozóan. A módszer előnye, hogy a paraméterek befolyását *globálisan*, azaz a teljes paramétertartományon képes jellemezni. Hátránya, hogy a statisztikához nagy számú kiértékelést (kísérletet) igényel. Ha „virtuális” kísérletről, azaz szimulációról van szó, a kiértékelést hatékonyabbá tehetjük helyettesítő (angolul *surrogate*) modellek alkalmazásával; e téren jó tapasztalataink vannak például a polinomiális káosz sorfejtésen alapuló helyettesítéssel [10, 113].

A Sobol-indexes vizsgálatot adaptáltuk a szóban forgó feladatra, ahol a bemeneti paraméterek a tekercs geometriai méretei, valamint a hálófelosztás N_r , N_φ és N_z értékei, a kimeneti jellemző pedig a megoldás hibája, azaz J_φ szórása volt. Az eredményeket a [66] dolgozatban



3.10. ábra. Az áramsűrűség ϕ komponense a homogenizált végelem-modellben kvadratikus, illetve formfüggvények használata mellett.

foglaltuk össze, de itt nem részletezzük. A vizsgálat egyik fontos megállapítása, hogy a spirális homogenizálás módszere biztonságosan használható a $q \geq 10^{-4}$ paramétertartományon, amely lefedi a gyakorlatban használt HTS tekercseknél előforduló értékeket.

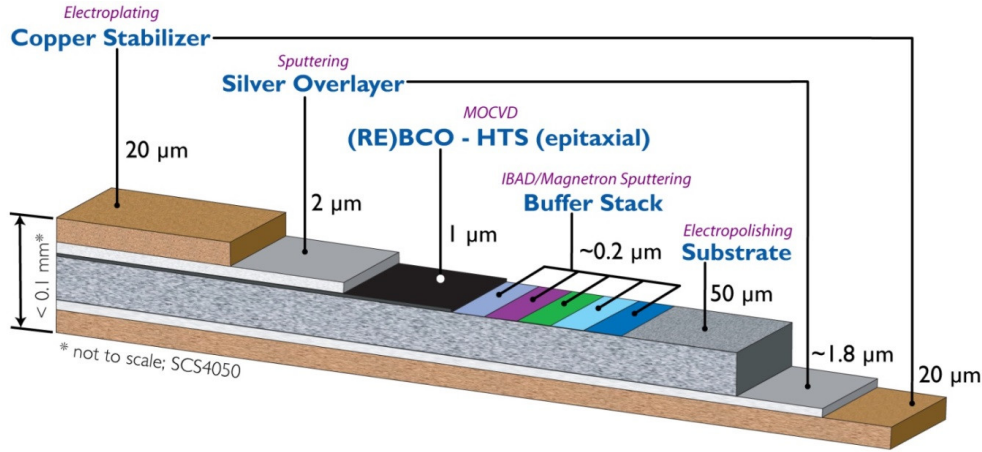
3.6. Szupravezető szalagtekercs szimulációja

A második generációs avagy magas hőmérsékletű szupravezetőkkel (HTS) a korábbiaknál nagyobb kritikus értékek érhetők el úgy a hőmérséklet, mint az áramsűrűség, illetve a mágneses tér tekintetében. Üzemi hőmérsékleten tartásuk folyékony hélium helyett cseppfolyós nitrogénnel történik, ami könnyebben kivitelezhető és kevésbé költséges. Ugyanakkor hátrány, hogy a ma ismert ilyen tulajdonságú anyagok (pl. YBCO, ittrium-bárium-réz-oxid) törékeny kerámiák, így a gyárthatóságnak méret- és alakbeli korlátai vannak: legtöbbször huzal vagy szalag formájában találkozunk velük.

A HTS szalagot általában rétegnövesztéssel állítják elő. A vékony HTS réteg – különböző puffer-rétegekkel együtt – egy viszonylag vastag hordozóra kerül; mindezeket két oldalról ezüst, illetve réz stabilizátorrétegek határolják. A rétegstruktúrát a 3.11. ábra szemlélteti. A szalagból legtöbbször lapos korong (*pancake*) vagy ovális (*racetrack*) alakú spiráltekercset készítenek (vö. 3.1. ábra).

Makroszkopikus anyagmodell

A HTS tekercs *teljes körű* modelljének magában kell foglalnia az elektromágneses, a hőtani és a mechanikai viselkedést. Ezt az eleve csatolt problémát tovább bonyolítja a szupravezetés fizi-



3.11. ábra. HTS szalag felépítése (forrás: SuperPower Inc. [104]).

kája. A szupravezetőt – egy praktikus, makroszkopikus megközelítésben – az ún. kritikus állapot modell (*critical state model*, CSM) írja le [99, 110]. A CSM lényegében három paraméterrel, a J_c kritikus áramsűrűséggel, a B_c kritikus mágneses indukcióval, valamint a T_c kritikus hőmérséklettel jellemezhető (pontosabban az áram-indukció-hőmérséklet koordináta-rendszerben általuk kifeszített ún. kritikus felülettel, amely a szupravezető állapotot határolja). A modell részletes ismertetése nem feladatunk; az megtalálható a hivatkozott szakirodalomban.

A CSM egyik folyamánya a *nemlineáris E - J* karakterisztika, amelyet leggyakrabban hatványfüggvénnyel (*power law*) közelítenek. Ez azonban függ a mágneses tértől és a hőmérséklettől is. Az előbbire számos empirikus összefüggés létezik [110], amelyet mérésekhez illesztenek.¹⁰ Szupravezető szalagnál figyelembe kell venni még a mágneses *anizotrópiát* [34, 119, 120]. A hőmérsékletfüggést szintén hatványfüggvénnyel közelítik (lásd pl. [23]). A fentieket egyesítve, és formálisan a fajlagos vezetőképességre, vagyis az áramsűrűség-térerősség arányra rendezve a következő „univerzális” képletet nyerjük:

$$\sigma(E, B, T) = \frac{J_c}{E_c} \left(\frac{|E|}{E_c} \right)^{\frac{1-n}{n}} \times \left(1 + \frac{\sqrt{B_\xi^2 + k^2(B_\eta^2 + B_z^2)}}{B_c} \right)^{-b} \times \left(\frac{T_c - T}{T_c - T_0} \right)^\beta, \quad \text{ha } T < T_c. \quad (3.62)$$

A képletben további modellparaméterek jelennek meg, így az E_c kritikus térerősség, a k anizotrópia-tényező, a T_0 „üzemi” hőmérséklet, valamint az n , b és β kitevők. A mágneses anizotrópia kifejezésében B_ξ a szalagra merőleges, B_η és B_z pedig a két vele párhuzamos indukciókomponens (vö. 3.3. ábra).

Vegyük észre, hogy bár az E - J hatványfüggvény-karakterisztika első pillantásra egyértékű, statikus (rezisztív) nemlinearitásnak tűnik, de a B mágneses indukció áttételesen – a (3.2) Maxwell-egyenleten keresztül – E időfüggését is képviseli. Valójában tehát dinamikus nemlinearitással van dolgunk, amelynek egyik látványos következménye a *histerézis*. A [120] cikkben például a

¹⁰ Meg kell jegyeznünk, hogy az anyagmodell paramétereit gyakran olyan mérési elrendezésre (pl. egyenes szalagszakaszra) határozzák meg, amely nem feltétlenül releváns egy feltekert szalag esetében [120].

tekercs be- és kikapcsolását követően az áram nullára csökken ugyan, de az áramsűrűség nem, ugyanis a szalagkeresztmetszet egyes részein oda-, miközben más részein visszafelé folyik az áram, nullát adva eredőül. Emiatt természetesen valamekkora mágneses tér is jelen van.

3.6.1. HTS tekercsek szimulációs alapfeladatai

A HTS szimuláció szakirodalmában három jellegzetes problémátípus különíthető el:

- A *kritikus állapot* (*critical state*) modelljében általában azt a legnagyobb egyenáramot keresik, amely mellett az elektromos térerősség a szalagban sehol nem haladja meg az E_c kritikus értéket. Térszámítási szempontból ez „lassú” tranziens MQS problémának minősül hőtani csatolással [2, 120].
- A *váltakozóáramú veszteség* (*AC loss*) a HTS hiszterézisveszteségéből (lásd fent) és a réz (vagy ezüst) stabilizátorrétegben fejlődő örvényáram-veszteségből áll. A szinuszos gerjesztés dacára ezt a feladatot is az időtartományban kell megoldani az anyag nemlineáris karakterisztikája miatt, természetesen hőtani csatolással, utóbbi azonban gyakran stacionárius eloszlásúnak vehető [6, 34, 119].
- A tekercsek üzemeltetésével kapcsolatos legnagyobb problémát a *quench* detektálása és kivédése jelenti. Ha a tekercs egy területén valamely térjellemző meghaladja a kritikus értéket, a szupravezető ott normál állapotba kerül, az áram pedig visszafolyik a stabilizátor rétegbe, ahol Joule-hő keletkezik. A hőfejlődés hatására viszont újabb területek billenhetnek normál állapotba, vagyis ez az ún. *normál zóna* egyre inkább kiterjedhet. A zóna lavinaszerű terjedése a *quench*, amely végső soron az eszköz károsodásához is vezethet. Az irodalomban fontos mennyiségként tartják számon a normál zóna terjedési sebességét (NZPV, *normal zone propagation velocity*), amely igen lassú, ezért kívülről nehezen észlelhető. A szimulációnál a *quench*-jelenséget elsősorban hőtani tranziensként kezelik, amelynek háttéréül általában – az egyszerűsítés kedvéért – stacionárius árameloszlás, illetve mágneses tér szolgál [23, 36, 54, 73].

Megjegyezzük, hogy amíg a kritikus állapot és az AC veszteségek sikerrel számíthatók egyszerűsített, 2D geometriájú modellekkel, addig a *quench* alapvetően 3D modellt igényel.¹¹

3.6.2. Bekapcsolási tranziens, és kritikus állapot

Az alább bemutatott példa egy HTS szalagtekercs kritikus állapotának szimulációja. Jóllehet ez a stacionárius (DC) állapotra vonatkozik, a (3.62) karakterisztika dinamikus jellege miatt (lásd fentebb) mégsem tekinthetünk el az áram felfutásának azaz tranziensének modellezésétől.

A tekercs geometriája hasonló, mint a 3.5.2. szakaszban: a belső és külső sugár $r_b = 29,5$ mm, ill. $r_k = 39,5$ mm, a magasság $h = 4,35$ mm, és a menetszám $N = 40$. Az ottani rézszalag helyett ezúttal egy $235\ \mu\text{m}$ vastag HTS szalagból áll a tekercs, amelyből azonban csak a $w = 1\ \mu\text{m}$ vastag

¹¹ Ennek ellenére léteznek 2D *quench*-modellek, azonban prediktív erejük megkérdőjelezhető.

3.2. táblázat. A (3.62) vezetőképesség-karakterisztika paraméterbeállításai

E_c	$100 \frac{\mu V}{m}$	n	21
J_c	$2,46 \cdot 10^{10} \frac{A}{m^2}$	k	0,275
B_c	32,5 mT	b	0,6
T_c	92 K	β	1,2

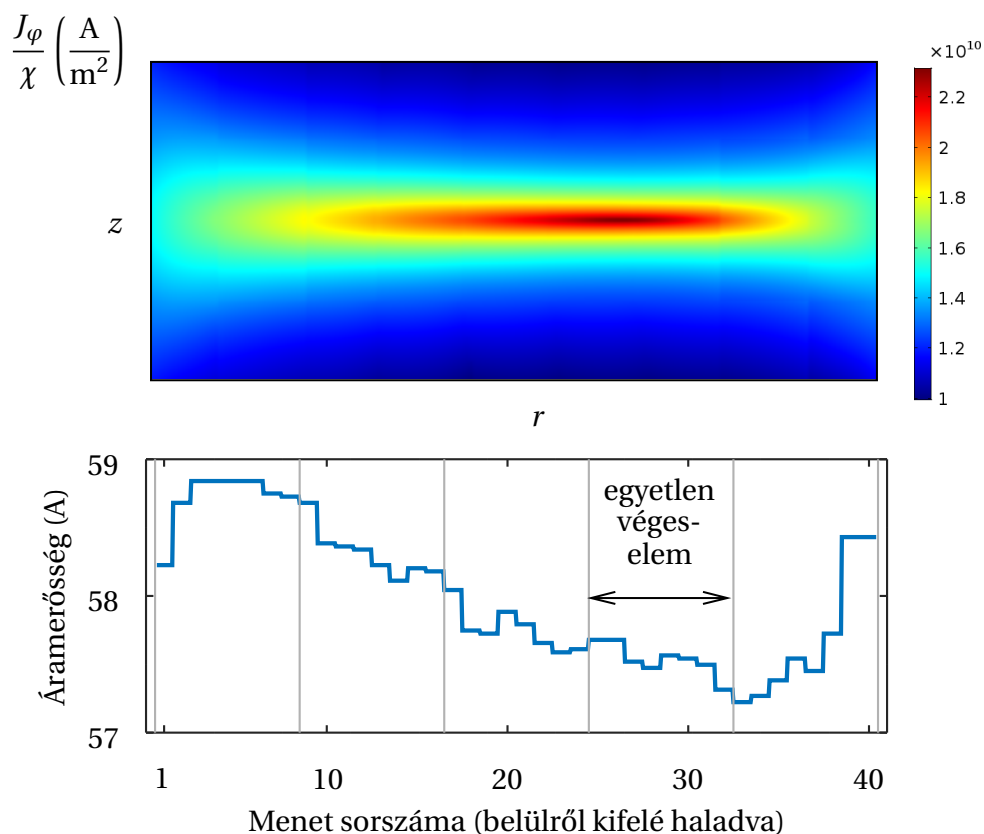
YBCO réteget tekintjük „vezetőnek” a modellben, lévén a vezetőképessége (szupravezető állapotban) nagyságrendekkel magasabb a többi rétegénél (vö. 3.11. ábra). Ezzel a kitöltési tényező $\chi = 4 \cdot 10^{-3}$ értékre módosul.

Példánkban az elektromágneses jelenség modellezésére összpontosítunk, ezért a hőmérsékletfüggést nem vesszük figyelembe; pontosabban a $T = T_0 = 70$ K üzemi hőmérsékleten érvényes értékekkel számolunk. A (3.62) karakterisztika itt felhasznált paraméterértékeit a 3.2. táblázatban foglaltuk össze. Az energiamentes tekercsre a $t = 0$ pillanattól kezdve állandó $U = E_c l = 8,55 \cdot 10^{-4}$ V kapocsfeszültséget kényszerítünk, és a folyamatot olyan hosszú időtartamra szimuláljuk, amely alatt az áram a felfutását követően nagyjából stacionáriussá válik.

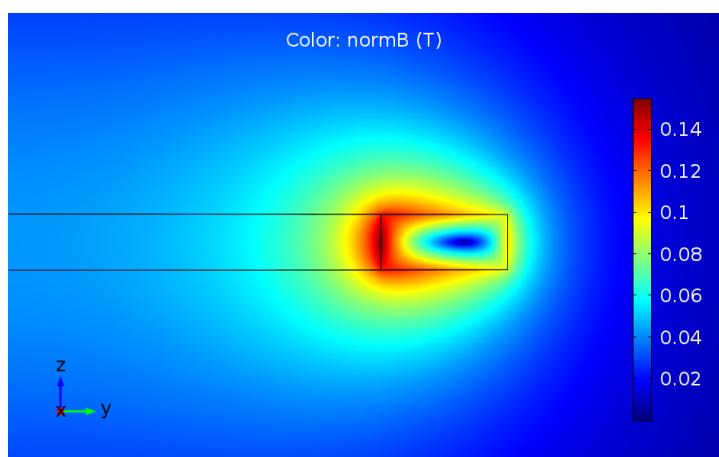
A számítást ezúttal is a Comsol Multiphysics® szoftverrel végeztük. A vezető Ω_c tartományán reguláris, görbevonalú (*mapped*) hexaéderhálót vettünk fel $N_r \times N_\varphi \times N_z = 5 \times 50 \times 4$ elemszámmal, míg a környező levegő Ω_n tartományán strukturálatlan (*free*) tetraéderhálót generáltunk. Ez összesen $6,3 \cdot 10^5$ szabadsági fokot eredményezett. A nemlineáris iterációra a beépített Newton-módszert használtuk, a lineáris alproblémára a szegregált módú PARDISO megoldót választottuk, az időlépést pedig a Comsol adaptív stratégiájára bíztuk [26]. A 106 időlépésből álló megoldás kiszámítása átlagosan néhány órát vett igénybe egy i7 típusú asztali számítógépen, ez azonban erősen függött a megoldó paramétereinek beállításától.

A tranziens időtartama mintegy 40 s (a tekercs becsült időállandója tehát kb. 5 s). A stacionárius árameloszlást a 3.12. ábra mutatja a tekercs keresztmetszetében; az áramsűrűséget elosztottuk a kitöltési tényezővel, hogy közvetlenül az YBCO rétegre vonatkozó értéket kapjunk. A mágneses tér a 3.13. ábrán látható. Ezeket érdemes összevetni a lineáris tekercs megfelelő téreloszlásaival (3.8. és 3.9. ábra). A HTS tekercsre kapott eredmények hihetőek ugyan, és hasonlítanak a szakirodalomban találhatóakra (lásd pl. [119, 120]), azonban a közvetlen összehasonlításnak nincs értelme, mivel azok más gerjesztésre születtek.

A megoldás helyességét a homogenizálás szempontjából úgy ellenőrizzük, hogy kiszámítjuk az egyes menetekre eső áramot egy választott keresztmetszetben, azaz integráljuk a J_φ áramsűrűség-komponenst az egyes menetek helyén. Mivel nem áram-, hanem feszültségkényszerrel dolgozunk, nem meglepő, hogy a menetáramok némi fluktuációt mutatnak (lásd 3.12. ábra). Azonban az átlagtól való eltérés mindenhol $\pm 1,5\%$ -on belül van, ami az igen ritka felosztásra tekintettel (egy-egy végelelem sugárirányban 8 meneten ível át) igen csekély. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a spirálisan anizotrop, homogenizált vezetőképességgel a feszültségkényszerrel kvázi-áramkényszerre transzformáltuk.



3.12. ábra. Fent: stacionárius árameloszlás a homogenizált tekercsmodell keresztmetszetében. Alatta az egyes menetekben folyó áramok diagramja, amelyet az áramsűrűség menetenkénti integrálásával állítottunk elő.



3.13. ábra. A mágneses indukció abszolút értékének eloszlása a HTS tekercs keresztmetszetén és környezetében.

4. fejezet

Mozgó közeg nyugvó-ekvivalens modellje

4.1. Bevezető és célkitűzés

A mozgó testek elektrodinamikájának tárgykörében gyakran találkozunk olyan feladattal, amelyben a test alakja invariáns a mozgásra. Ilyen például a hengerszimmetrikus test forgása a szimmetriatengelye körül, és a mozgás irányában igen nagy kiterjedésű rúd vagy lemez translációja. Ezt a mozgást *stacionáriusnak* hívjuk. Számos gyakorlati alkalmazása közül említhetjük a mágneses lebegtetést [28], a mágneses kivetőszerkezetet [86], az örvényáramú fékezést [56] és a Lorentz-erőn alapuló sebességmérést [118]. Ugyancsak ide sorolható néhány elméletibb jellegű probléma, mint a homopoláris generátor (Faraday-korong), a fémcsőben eső állandó-mágnes [14] és a Wilson&Wilson kísérlet [57].

Az elektromágneses jelenség fizikai leírásában a mozgás ténye háromféleképpen jelenhet meg: (i) az időben változó geometriában, (ii) a konstitúciós egyenletekben, valamint (iii) a közezghatárra vonatkozó folytonossági feltételekben. Mivel a szóban forgó problémátípusban az első nyilvánvalóan nem játszik szerepet, továbbá – amint látni fogjuk – a határfeltételek is a nyugalmi alakjukban érvényesek [111], a mozgás egyedül a konstitúciós egyenletekben jelenik meg, amelyek eredeti értelmezésükben az *anyag* elektromágneses viselkedésére vonatkoznak.

Ismert tény, hogy a közegmozgás egyfajta csatolt *magnetoelektromos* hatást kelt [61]. Ugyanakkor léteznek ún. bi-anizotrop anyagok (pl. bizonyos kristályok és kompozit meta-anyagok), amelyek nyugalomban is hasonló mágneses-elektromos csatolást hoznak létre [71]. A mozgó közegnek tehát elvileg megfeleltethető egy vele elektromágneses szempontból ekvivalens, nyugvó, bi-anizotrop közeg, jóllehet a megfeleltetés nem egyértelmű, és többnyire fiktív közezgre utal.¹ Ezt az ekvivalenciát használják ki például a transzformációs optikában a mozgás illúziójának keltésére [112] vagy éppen elrejtésére [24].

Az alábbiakban olyan eljárást mutatunk be, amellyel a stacionárius közegmozgás elektromágneses modellje egy nyugvó közeg ekvivalens modelljévé alakítható [41]. Az eljárás olyan értelemben *közvetlen*, hogy megkerüli az ekvivalencia alapjául szolgáló bi-anizotrop közeg ka-

¹ Belátható, hogy nemcsak a mozgásnál szerepet játszó Lorentz-transzformáció, hanem az elektromágneses tér tetszőleges lineáris transzformációja megfeleltethető egy bi-anizotrop tulajdonságú nyugvó közeg hatásának [109].

rakterisztikájának meghatározását, mégpedig azáltal, hogy a mozgó közeg *konvekciós-diffúziós* típusú parciális differenciálegyenletét (PDE) *formálisan* tisztán *diffúzióssá* alakítja át.

Az ötlet eredetileg a végeselemes számítások egy technikai problémája kapcsán merült fel: a FEM szoftverek egy része sajnos nem támogatja a közegmozgás modellezését, legalábbis nem a felhasználói felület legmagasabb szintjén. Néhány fejlettebb szoftverben (pl. [26]) van ugyan mód a *vezető* anyagok mozgásának modellezésre, de például mágnesek vagy dielektrikumok mozgására már nincs. Az itt javasolt formális átalakítással tehát olyan FEM szoftverekben is lehetővé válik a stacionárius közegmozgás modellezése, amelyekben ez a funkció nincs beépítve, anélkül hogy a szoftver alacsonyabb hozzáférési szintjén kellene azt implementálni [40]. Igaz ugyan, a PDE diffúziós tagja ilyenkor általában inhomogén tenzoregyütthatót kap, ám ennek kezelésére számos végeselemkód eleve alkalmas.

A konvekciós-diffúziós átalakítástól eredetileg egyéb hasznót is reméltünk. Ismert, hogy ha (nagyobb sebességnél) a konvekciós tag dominál a diffúzióssal szemben, a differenciálegyenlet numerikusan instabillá válik, és megoldásában hamis (fizikailag megalapozatlan) térbeli oszcilláció jelenhet meg [17, 56, 86]. Azt vártuk, hogy a konvekciós tag kiiktatásával ez a probléma automatikusan megszűnik, de az alábbiakban ismertetett okok miatt ez végül nem teljesült.

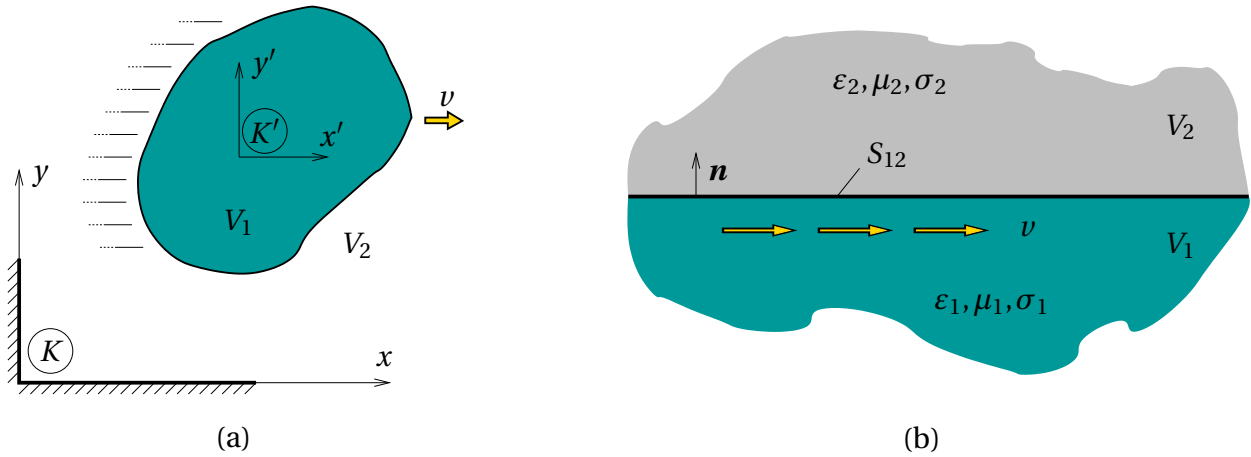
Viszont az átalakításnak volt egyéb hozadéka. Sikerült megmutatni, hogy a végeselem-modellben a mozgó tartományt helyettesítő bi-anizotrop közeg határán fel kell venni egy fiktív felületi forrást az ekvivalencia biztosítására. Ez az ún. gyenge alakban felírt egyenletek és a közeghatáron érvényes folytonossági feltételek együttes következménye. Érdekes módon a szakirodalom ezzel a problémával általában nem foglalkozik, merthogy az ekvivalencia vizsgálatában hallgatólagosan állandó vagy folytonosan változó közegjellemzőre szorítkoznak.

Összefoglalva: a kidolgozott eljárás elsősorban abban különbözik a mozgó és bi-anizotrop közegek ekvivalenciáját vizsgáló egyéb munkáktól, hogy (i) a PDE közvetlen átalakításán alapul, amelyhez nem kell meghatározni a helyettesítő anyagjellemzőket; (ii) a végeselemes modellben figyelembe veszi a közeghatáron az ekvivalenciához szükséges felületszerű forrást; (iii) tekintettel van a végeselemes implementációra.

A fejezet további részében először áttekintjük a konstitúciós egyenletek és határfeltételek mozgó objektumra érvényes, transzformált alakjait, majd bemutatjuk az eljárást, amellyel a PDE mozgást képviselő tagja átalakítva beolvasztható a diffúziós tagba. Ezután újratárgyaljuk a határfeltételeket, de már a gyenge alak keretei között. A levezetések során az egyszerűség kedvéért síkban vizsgálható mozgást feltételezünk, de az eredmények minden további nélkül általánosíthatók háromdimenziós problémákra. Az elméleti részt két tesztfeladat megoldása követi, amelyek helyességét szakirodalmi adatok támasztják alá.

4.2. Elektrodinamikai törvények transzformációja

A Maxwell-egyenletek és a belőlük levezethető további összefüggések kovariánsak a Lorentz-transzformációra, amely Einstein speciális relativitáselmélete szerint az egymáshoz képest mozgó K és K' inerciarendszerek között teremti a kapcsolatot [59]. Az ún. sztenderd elrendezésre (lásd



4.1. ábra. (a) A modell vizsgálatához használt inerciarendszerek: K a „nyugvó”, K' pedig a „mozgó” objektumhoz rögzített koordináta-rendszer. (b) Stacionárius relatív mozgást végző közegek határfelülete.

4.1/a. ábra) vonatkozó koordinátatranszformáció a következő:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c_0^2}x\right), \quad \text{ahol} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}. \quad (4.1)$$

A kifejezésekben (x, y, z, t) és (x', y', z', t') ugyanazon elemi esemény hely- és időkoordinátái a K , illetve a K' koordináta-rendszerben, v a K' rendszer sebessége a K -ból nézve, c_0 pedig a vákuumbeli fénysebesség.

Ennél általánosabb mozgások is tárgyalhatók a speciális relativitáselmélet keretei között – habár közelítő jelleggel – a *pillanatnyi nyugalmi rendszer* fogalmán keresztül [59]: ha a test vagy közeg mozgását K -ban a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ *sebességtér* jellemzi, akkor annak bármely $P(x, y, z)$ pontjához tetszőleges t időpontban hozzárendelhető egy olyan $K'(x, y, z, t)$ lokális inerciarendszer, amelynek sebessége \mathbf{v} . Ez a közelítés „hétköznapi”, azaz nem relativisztikus nagyságú sebességek, illetve moderált gyorsulások mellett megfelelő pontosságú [111].

A gyakorlatban felmerülő elektromágneses térszámítási feladatok túlnyomó részét elegendő a $v \ll c_0$ ún. *nemrelativisztikus* határesetben megoldani. Egyéb esetekben természetesen a relativisztikus összefüggések használhatók. Van azonban a jelenségeknek egy viszonylag széles köre, amelyet érdemes egy számítástechnikailag egyszerűbb, köztes közelítésben tárgyalni: ez az ún. *kvázi-relativisztikus* közelítés, amely a $v^2 \ll c_0^2$, de $v \not\ll c_0$ feltevésen alapul. A dolgozatban ez utóbbit tartjuk szem előtt.

4.2.1. Maxwell-egyenletek vákuumban

A négy Maxwell-egyenlet vákuumbeli avagy „mikroszkopikus” alakja egy K rendszerben:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.5)$$

A ρ , \mathbf{J} , \mathbf{E} és \mathbf{B} mennyiségek páronként *négyesvektor*ra, illetve -tenzorra vonhatók össze, amelyekkel a (4.2)-(4.5) egyenletek egyszerűbb alakban írhatók. Mi azonban továbbra is a fenti ún. *hármás* alakot használjuk, mivel az jobban illeszkedik a mérnöki numerikus térszámítás jelenlegi eszköztárához.

A relativitáselmélet értelmében a Maxwell-egyenletek a K' rendszerben is pontosan ugyanilyen alakúak. Tekintettel erre, a (4.1) Lorentz-transzformáció segítségével levezethetők a K , illetve K' rendszerben nyugalomban lévő megfigyelők által mért térerősség- és indukciókomponensek közötti összefüggések (lásd pl. [100]). A sztenderd elrendezésre érvényes alakjuk:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x & J'_x &= \gamma(J_x - v\rho) & \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2}J_x\right) \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right) & J'_y &= J_y \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) & J'_z &= J_z \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2.2. Maxwell-egyenletek közegben, konstitúciós egyenletek

A közegbeli elektromágneses jelenségek egyszerűbb leírására bevezetjük az elektromos eltolás \mathbf{D} , valamint a mágneses térerősség \mathbf{H} vektorát a

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (4.7)$$

összefüggésekkel, amelyekben a \mathbf{P} polarizációvektor a közegbeli ún. *kötött* töltések, míg az \mathbf{M} mágnesezettség a kötött áramok *statisztikai* hatását írja le.² Ezekkel a Maxwell-egyenletek kö-

² A klasszikus elektrodinamikában lényegében ezzel a hatással definiáljuk magát a közeget.

zegli avagy „makroszkopikus” alakja:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (4.11)$$

\mathbf{J}_f és ρ_f az ún. *szabad* áram-, illetve töltéssűrűség (a továbbiakban az „f” jelölést elhagyjuk). Feltéve, hogy a (4.8)-(4.11) alak is Lorentz-kovariáns, belátható, hogy a $K \rightarrow K'$ transzformáció a \mathbf{D} és \mathbf{H} vektorok esetében az alábbi megfeleltetésekre vezet:

$$\begin{aligned} D'_x &= D_x & H'_x &= H_x \\ D'_y &= \gamma \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right) & H'_y &= \gamma (H_y + v D_z) \\ D'_z &= \gamma \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right) & H'_z &= \gamma (H_z - v D_y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

A (4.8)-(4.11) Maxwell-egyenletek megoldásához – a bevezetett új térmennyiségek miatt – további egyenletek szükségesek, amelyek vagy közvetlenül a \mathbf{P} és \mathbf{M} vektormezőket, vagy a $\mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ és $\mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ függvényeket (karakterisztikákat) adják meg. Az egységes kezelés érdekében – harmadikként – ide soroljuk még a vezetőképességre vonatkozó $\mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ karakterisztikát, az ún. „differenciális” Ohm-törvényt. Ezek a konstitúciós egyenletek, amelyek általános alakja (1.5).

A gyakorlatban előforduló közegek többségében az említett karakterisztikák lineárisnak tekinthetők, és a bennük szereplő arányossági tényezők (anyagparaméterek) mérhetők; ezáltal mellőzhető \mathbf{P} és \mathbf{M} , illetve azok anyagszerkezeti háttere. A továbbiakban lineáris, izotrop, és beiktatott forrást nem tartalmazó közegre szorítkozunk,³ melynek konstitúciós egyenletei a közegehez „rögzített”, vele együtt mozgó K' inerciarendszerben:

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}', \quad \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}', \quad \mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'. \quad (4.13)$$

Itt $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ a közeg permittivitása, $\mu = \mu_0 \mu_r$ a permeabilitása (ε_0 , μ_0 a vákuumbeli, míg ε_r , μ_r a közegre jellemző relatív értékek), σ pedig a fajlagos vezetőképessége.

Ha a (4.13) egyenleteket komponensekre bontjuk, majd alkalmazzuk a (4.6) és (4.12) transzformációs képleteket, megkapjuk a közeghez képest egyenletes, $-v$ sebességgel mozgó K rendszerbeli összefüggéseket. Az így adódó „teljesen” relativisztikus alakot itt nem közöljük, de megtalálhatók pl. a [111] műben. A gyakorlati fontosságú, *kvázi-relativisztikus* közelítésben a komponenseként kapott összefüggések praktikus, vektoriális formában írhatók; ezek az ún. Min-

³ A tárgyalás anizotrop, sőt bi-anizotrop közegekre is kiterjeszthető [106], ezzel azonban itt nem foglalkozunk.

kowski-egyenletek, amelyeknek több ekvivalens alakja ismert [57, 91, 111]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu c_0^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu c_0^2} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{v} \rho. \quad (4.16)$$

Megfigyelhető, hogy a (4.13)-tól eltérően ez utóbbiak már nem tisztán elektromos, illetve mágneses természetűek, hanem magneto-elektromos csatolást, ún. keresztteffektusokat is tartalmaznak.

Amint a bevezetőben utaltunk rá, a leggyakrabban előforduló problémátípus a mozgó vezetővel, pontosabban a mozgási indukcióval kapcsolatos; ehhez lényegében csak a (4.16) összefüggésre van szükség, ráadásul többnyire a töltést tartalmazó konvektív áramtag nélkül. A ritkábban használt (4.14) és (4.15) karakterisztikák alkalmazására két példa a Wilson&Wilson kísérlet [57] és a nagy sebességű plazma elektrodinamikája [106].

4.2.3. Közeghatár-egyenletek

Tekintsük a szomszédos V_1 és V_2 tartományokat, melyeket az S_{12} felület határol el egymástól (4.1/b. ábra). A tartományokat különböző közegek töltik ki, amelyek anyagi jellemzői $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, illetve $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. Azt vizsgáljuk, hogy a határfelület egy pontjában az elektromágneses tér milyen folytonossági feltételeknek tesz eleget. Ehhez először olyan K' inerciarendszert választunk, amelyben a vizsgált pont nyugalomban van, és egyelőre feltesszük, hogy maguk a közegek sem mozognak. Ekkor a térvektorok folytonossági (ugrási) feltételeinek jól ismert alakja [98]:

$$[\mathbf{n}' \times \mathbf{E}'] = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

$$[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{B}'] = 0 \quad (4.18)$$

$$[\mathbf{n}' \times \mathbf{H}'] = \mathbf{J}'_s \quad (4.19)$$

$$[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{D}'] = \rho'_s \quad (4.20)$$

Az egyenletekben \mathbf{J}'_s és ρ'_s a felületi áram-, illetve töltéssűrűséget jelöli, \mathbf{n}' a felület normálvektora, $[\cdot]$ pedig az adott mennyiség ugrása az S_{12} felületen, a $V_1 \rightarrow V_2$ irányban. Ezt kiegészíthetjük az áramsűrűségre vonatkozó, stacionárius esetben érvényes feltétellel, amely a töltésmegmaradás és (4.20) együttes következménye:

$$[\mathbf{n}' \cdot \mathbf{J}'] = 0. \quad (4.21)$$

Ha ugyanezeket a K' -höz képest $-\mathbf{v}$ sebességgel mozgó K rendszerből szemléljük, akkor a (4.6) és (4.12) transzformációk felhasználásával a következő alakra jutunk (a levezetés megtalálható

többek között a [111] műben):

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{B}] \quad (4.22)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0 \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{J}_s - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{D}] \quad (4.24)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] = \rho_s \quad (4.25)$$

Ne feledjük, hogy a transzformáció során csupán a koordináta-rendszer váltásából eredő, „lát-szólagos” mozgásra voltunk tekintettel. A gyakorlati alkalmazás szempontjából azonban alapvető kérdés, hogy érvényben maradnak-e a (4.22)-(4.25) feltételek, ha a közegek egymáshoz képest „valódi” mozgásban is vannak. Gyakorta valamely tárgy vákuum-, vagy levegőbeli mozgásáról van szó. Ebben az esetben a kérdéses határfeltételek nyilvánvalóan teljesülnek, mivel a tárgyhoz rögzített K' rendszerből nézve a „mozgó” vákuum, illetve levegő elektromágneses jellemzői azonosak a nyugvóéval, és a K' -ben érvényes (4.17)-(4.20) alakból már következik a (4.22)-(4.25) transzformált alak.

Mélyebb megfontolást igényel, ha egyik közeg se vákuum vagy levegő. Gyakorlati relevanciája a közeghatárral *párhuzamos* relatív mozgásnak van; alkalmazásként említhetjük a csúszó érintkezőket, vagy az elektromágneses ágyút (*railgun*). A (4.22)-(4.25) feltételek érvényessége ez esetben úgy látható be, hogy azok rendre a (4.8)-(4.11) Maxwell-egyenletek valamelyikéből vezethetők le, ahol egyrészt nem jelennek meg a konstitúciós egyenletek, másrészt csak a határfelületre *merőleges* sebességkomponens $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ számít [111]. A kérdést részletesen tárgyalja, sőt mérésrel is alátámasztja [94].

Számunkra a fentiek legfontosabb következménye az, hogy ha két közeg egymáshoz képest stacionárius mozgást végez, akkor bármelyikhez rögzítsük is koordináta-rendszerünket, abban $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ miatt a (4.22)-(4.25) folytonossági feltételek a (4.17)-(4.20) nyugalmi alakba mennek át.

4.3. Peremérték-problémák nyugalmi ekvivalense

Olyan térszámítási feladatokat vizsgálunk, amelyeknél mind a geometria, mind az elektromágneses tér eltolási szimmetriát mutat a derékszögű koordináta-rendszer z tengelye mentén. Ekkor a számítás elvégezhető egy x - y síkban fekvő, redukált, kétdimenziós $V \subset \mathbb{R}^2$ modelltartományon. A vizsgálat tárgyát tovább szűkítjük a stacionárius, valamint a frekvenciatartományban megfogalmazott problémákra, vagyis egyenleteink az időtől függetlenek.⁴ Feltesszük, hogy az objektum, illetve közeg (stacionárius) mozgását leíró \mathbf{v} sebességvektorok az x - y síkban fekszenek, azaz $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$. Egyelőre tekintsünk el a mozgó és nem mozgó részek megkülönböztetésétől, és formálisan terjesszük ki a \mathbf{v} sebességmezőt a teljes V tartományra. Az ilyen problémák

⁴ Valójában az időfüggés nem jelent elvi akadályt, azonban a levezetést feleslegesen bonyolítaná.

meglehetősen széles köre leírható egy

$$\nabla \cdot (-c \nabla u) + b \mathbf{v} \cdot \nabla u + au = f \quad (4.26)$$

alakú parciális differenciálegyenlet (PDE) segítségével, amelyben $u = u(x, y) \in C^2(V)$ az ismeretlen vektor-skalár függvényt (általában potenciált, esetleg egy fizikai mező adott komponensét), f pedig a gerjesztést (forrást) képviseli. A vektorok kétdimenziósak: $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Az a , $b\mathbf{v}$, és c (általában helyfüggő) paramétereket hagyományosan abszorpció, konvekció, illetve diffúzió együtthatónak nevezzük, és hasonló jelzővel illetjük a PDE megfelelő tagjait.

Zárt V tartományon (4.26) megoldásának egyértelműségét a tartomány ∂V peremére előírt peremfeltételek biztosítják. Mivel e szakaszban a PDE átalakítására, valamint a résztartományok határain érvényes folytonossági feltételekre összpontosítunk, az egyszerűség kedvéért csak az ún. Dirichlet-feladatot vizsgáljuk, amelynél a perem minden pontjában u értéke van előírva: $u|_{\partial V} = u_0$. Az imént definiált peremérték-problémára a továbbiakban tömören „mozgási modell” néven hivatkozunk.

4.3.1. A PDE konvekció-diffúzió átalakítása

Célunk egy olyan, a (4.26)-tal ekvivalens PDE felírása, amelyben *nem* szerepel a $b\mathbf{v} \cdot \nabla u$ konvekció tag. A fizikai képből kiindulva megállapíthatnánk az ekvivalens bi-anizotrop anyag paramétereit, majd azokat a Maxwell-egyenletekbe helyettesítve levezethetnénk a PDE-t (ezt az utat követi pl. [109]). Helyette azonban egy rövidebb, direkt megoldást választunk: a (4.26) konvekció tagját mintegy „beolvasztjuk” a diffúzió tagba, amelynek nyilvánvalóan ugyanarra az eredményre kell vezetnie. Az M diffúzió tenzor bevezetésével az egyenlet kívánt alakja:

$$\nabla \cdot (-M \nabla u) + au = f. \quad (4.27)$$

Erre – a hozzá tartozó perem-, ill. határfeltételekkel együtt – a továbbiakban „nyugalmi ekvivalens modell” néven hivatkozunk. Belátható, hogy az M tenzor egy alkalmas reprezentációja

$$M = \begin{pmatrix} c & -g \\ g & c \end{pmatrix} = cI + gJ, \quad (4.28)$$

amelyben I az egységmátrix, J a $+90^\circ$ -os forgatómátrix, $g = g(x, y) \in C^1(V)$ pedig egy megfelelően választott skalárfüggvény. Valóban, a (4.28) kifejezést behelyettesítve (4.27) diffúzió tagjába:

$$\nabla \cdot (-M \nabla u) = \nabla \cdot (-c \nabla u) + \nabla g \times \nabla u. \quad (4.29)$$

Az ebben szereplő kétdimenziós vektoriális szorzatot két tetszőleges vektorra a $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = p_x q_y - p_y q_x$ skalár értékű kifejezéssel értelmezzük. Ha összevetjük (4.26) és (4.29) elsőrendű derivál-

tat tartalmazó tagjait, megkapjuk az ekvivalencia kritériumát:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = b v_y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -b v_x. \quad (4.30)$$

Ez hagy némi szabadságot a g függvény megválasztásában, ám jól látható, hogy annak inhomogén volta a mozgó objektum vagy közeg tartományán elengedhetetlen, még abban az esetben is, ha maga a sebességmező homogén. Erre példát konkrét mozgásfajták esetén a 4.3.3. szakaszban fogunk látni. Megjegyezzük, hogy M ismeretében akár meg is állapíthatók olyan anyagparaméterek, amelyekkel a kívánt hatás, azaz a mozgás imitálása elérhető, de itt ez nem feladatunk.

4.3.2. Folytonossági feltételek és a PDE gyenge alakja

Az előző szakaszban láttuk, hogy a (4.26) mozgási és a (4.27) nyugalmi modell formális ekvivalenciába hozható. Ennek egyik hallgatóságos feltétele, hogy a b és c együtthatók valamint a \mathbf{v} sebességtér komponensei kellően simák, azaz legalább egyszer folytonosan differenciálhatók a V tartományon. Ez azonban jellemzően nem teljesül a közeget határokra, ahol hirtelen ugrást szenvedhetnek. Amint alább megmutatjuk, a probléma megoldása a kétféle modellben eltérő.

Tekintsük ehhez a 4.1. ábrát, ahol $V_1 \cup V_2 = V \subset \mathbb{R}^2$, $\partial V_1 \cap \partial V_2 = S_{12}$, továbbá $\mathbf{v}|_{V_2} = \mathbf{0}$.⁵ A folytonosság problémáját úgy kerülhetjük meg, hogy a PDE érvényességét csak a V_1 és V_2 tartományok belsejére korlátozzuk, ugyanakkor az S_{12} határfelület pontjaiban feltételt írunk elő u deriváltjainak ugrására.

Vegyük elsőként a (4.26) mozgási modellt. Ebben u deriváltjaira nézve a (4.17)-(4.21) egyenletek közül rendszerint csak kettő releváns, amelyek az alábbi feltételpárra vezetnek:

$$[\mathbf{n} \times \nabla u]_{S_{12}} = 0, \quad (4.31)$$

$$[\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u)]_{S_{12}} = f_s. \quad (4.32)$$

Utóbbiban f_s valamilyen felületi forrást jelöl. Hogy e két feltétel a (4.17)-(4.21) „eredeti” öt közül melyeknek felel meg, az alapvetően u fizikai jelentésétől függ. A továbbiakban feltesszük, hogy a modellalkotás során olyan u mennyiséget választottunk, amely legalább C^0 folytonosságú a közeget határokon; ez esetben (4.31) automatikusan teljesül.

A véges elem módszerben a PDE ún. *gyenge alakját* használják [21], melynek egyik előnye, hogy abban a (4.32) feltétel közvetlenül megjelenik, illetve előírható. A (4.26) PDE gyenge alakja

$$\int_V \{ \nabla \cdot (-c \nabla u) + b \mathbf{v} \cdot \nabla u + a u - f \} w \, dV = 0, \quad \forall w, \quad (4.33)$$

amelyben $w(x, y)$ a V tartományon értelmezett tesztfüggvény. Lényeges, hogy ebben az alakban $u, w \in H^1(V)$, azaz mindkét függvény a C^1 -nél enyhébb folytonossági feltételeknek eleget tevő H^1 Szoboljev-függvénytér eleme, továbbá Dirichlet-feladatnál, $w|_{\partial V} = 0$ miatt, $w \in H_0^1(V)$.

⁵ Jóllehet a modelltartomány kétdimenziós, peremét és belső határait pedig görbék alkotják, az általánosság kedvéért megtartjuk a V és S jelölést.

Bontsuk fel a (4.33) integrált a V_1 és V_2 tartomány szerint, alkalmazzuk a parciális integrálás tételét és a divergenciatételt (Gauss-tételt), majd vonjuk össze a tagokat.⁶ Felhasználjuk még, hogy w imént említett tulajdonsága miatt a felületi integrálok csak a közös S_{12} határon adnak járulékot, a ∂V külső peremen nem. Az átalakítás eredménye:

$$\int_V c \nabla u \cdot \nabla w \, dV - \int_{S_{12}} [\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u)] w \, dS + \int_V (b \mathbf{v} \cdot \nabla u + a u - f) w \, dV = 0, \quad \forall w. \quad (4.34)$$

Vegyük észre, hogy az S_{12} határfelületre vett integrálban megjelenik az $\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u)$ mennyiség ugrása. Ha kicseréljük az f_s felületi forrásra, akkor (4.34) úgymond „gyenge értelemben” implikálja (4.32) teljesülését:

$$\int_V c \nabla u \cdot \nabla w \, dV - \int_{S_{12}} f_s w \, dS + \int_V (b \mathbf{v} \cdot \nabla u + a u - f) w \, dV = 0, \quad \forall w \quad (4.35)$$

Ez történik a végeelem módszer legtöbb implementációjában (lásd pl. [26]). Igen gyakran $f_s = 0$, ami (4.35)-ben a felületi integrátag elhagyásának felel meg, ezért ezt a végeelem módszer *természetes feltételének* nevezik.

Tekintsük most a nyugalmi ekvivalens modell (4.27) egyenletének gyenge alakját:

$$\int_V \{ \nabla \cdot (-M \nabla u) + a u - f \} w \, dV = 0, \quad \forall w, \quad (4.36)$$

amelyen a fentihez hasonló átalakítást elvégezve

$$\int_V \nabla w M \nabla u \, dV - \int_{S_{12}} [\mathbf{n} \cdot (-M \nabla u)] w \, dV + \int_V (a u - f) w \, dV = 0, \quad \forall w \quad (4.37)$$

adódik. Látható, hogy ebben az esetben az $\mathbf{n} \cdot (-M \nabla u)$ mennyiség ugrására vonatkozó feltétel a mérvadó, amely az M tenzor (4.28) kifejezése, valamint (4.32) alapján így bontható fel:

$$[\mathbf{n} \cdot (-M \nabla u)] = [\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u)] + [g \mathbf{n} \times \nabla u] = f_s + [g \mathbf{n} \times \nabla u]. \quad (4.38)$$

Behelyettesítve (4.37)-be megkapjuk a végeelem módszerben használandó – a határfeltételt is magában foglaló – gyenge alakot:

$$\int_V \nabla w M \nabla u \, dV - \int_{S_{12}} \{ f_s + [g \mathbf{n} \times \nabla u] \} w \, dV + \int_V (a u - f) w \, dV = 0, \quad \forall w \quad (4.39)$$

Csak hogy a legtöbb szoftverben a (4.37) gyenge alak az alapértelmezett. Amennyiben nincs közvetlen hozzáférésünk, hogy átalakítsuk (4.39)-re, egy „trükkkel” közvetve is megtehetjük, ha az

$$[\mathbf{n} \cdot (-M \nabla u)]_{S_{12}} = f_s + [g \mathbf{n} \times \nabla u]_{S_{12}} = f_s + f_s^* \quad (4.40)$$

⁶ Ezek a lépések a legtöbb FEM tankönyvben megtalálhatók (lásd pl. [21]), ezért nem részletezzük.

feltételt írjuk elő a közegethatáron. Ebben f_s^* egy *fiktív* felületi forrásként értelmezhető, amelynek fizikai jelentése u választásának függvényében változatos lehet (lásd a 4.4. szakasz példáit). Könnyen belátható, hogy erre a fiktív forrásra szükség van, ugyanis ennek hiányában, $f_s = 0$ esetén, a (4.37)-ből következő *természetes* határfeltétel ellentmondana (4.32)-nek:

$$[\mathbf{n} \cdot (-M \nabla u)]_{S_{12}} = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{n} \cdot (-c \nabla u)]_{S_{12}} = -[\mathbf{g} \mathbf{n} \times \nabla u]_{S_{12}} \quad (4.41)$$

Érdeemes elgondolkodni azon, mi okozza a különbséget a két modellben, illetve nincs-e közöttük ellentmondás. Mint korábban említettük, stacionárius közegmozgásánál a mozgás ténye egyedül a konstitúciós egyenletekben tükröződik, amelyek viszont *de facto* azonosak egy nyugvó bi-anizotrop közeg karakterisztikájával. Valójában tehát (4.27) tekintendő a probléma *primer* matematikai reprezentációjának, és nem (4.26). Az előbbi átalakítva rendszerint különválasztjuk a sebességfüggő részt, amely nem lesz más, mint a (4.26) konvekciós tagja. A gyenge alakoknál pedig történetesen úgy adódik, hogy míg (4.26) esetében a (4.32) feltétel „természetes módon” előírható, addig (4.27) esetében nem. A különbség tehát formális, és alapvetően a gyenge alakból, illetve annak végelelemes implementációjából ered.

Röviden kitérünk még a diszkretizálás kérdésére. A (4.31) feltétel u folytonosságát jelenti, amelyet bármely C^0 konform végelelemháló egzakt módon kényszerít. Ugyanakkor a (4.32) feltétel a (4.35) ill. (4.39) gyenge alakok révén általában csak közelítőleg, pontosabban az elemfelosztást növelve aszimptotikusan teljesül.

4.3.3. Speciális mozgások: transláció és forgás

A stacionárius mozgás két legegyszerűbb – ugyanakkor a gyakorlatban legfontosabb – esete a homogén, merev test translációja, illetve forgása. A homogenitásból következően $b|_{V_1} = \text{konst.}$ (vö. 4.1. ábra). Transzláció esetén a \mathbf{v} sebességtér is homogén, azaz $v_x|_{V_1} = \text{konst.}$ és $v_y|_{V_1} = \text{konst.}$ Ez alapján a (4.30) feltételből meghatározható a $g(x, y)$ függvény kívánt alakja:

$$g = b v_y x - b v_x y + C, \quad (4.42)$$

amelyben C tetszőleges állandó. A helyvektor $\mathbf{r} = (x, y)$ jelölésével, valamint $C = 0$ választással az M tenzor (4.28) szerint így írható fel:

$$M_{\text{tran}} = cI + (b\mathbf{r} \times \mathbf{v})J \quad (4.43)$$

Megjegyezzük, hogy a helyvektor kezdőpontja szabadon megválasztható, mivel a (4.27) PDE az M deriválása miatt érzéketlen annak áthelyezésére. A (4.40)-ben szereplő fiktív forrás:

$$f_{s,\text{tran}}^* = [b(\mathbf{r} \times \mathbf{v})(\mathbf{n} \times \nabla u)]_{S_{12}} \quad (4.44)$$

Forgás esetén \mathbf{v} kifejezhető az Ω szögsebességgel. Feltéve, hogy a forgás az origó körül történik:

$$\mathbf{v} = \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = (-\Omega y, \Omega x). \quad (4.45)$$

Ezúttal is levezethető a megfelelő $g(x, y)$ függvény a (4.30) kritériumból:

$$g = \frac{1}{2} b \Omega x^2 + \frac{1}{2} b \Omega y^2 = \frac{1}{2} b \Omega |\mathbf{r}|^2, \quad (4.46)$$

amelyben az additív állandót eleve nullának vettük. Innen a (4.28) diffúziós tenzor:

$$M_{\text{rot}} = cI + \frac{1}{2} b \Omega |\mathbf{r}|^2 \mathbf{J} \quad (4.47)$$

illetve a (4.40) szerinti fiktív forrás:

$$f_{s,\text{rot}}^* = \left[\frac{1}{2} b \Omega |\mathbf{r}|^2 (\mathbf{n} \times \nabla u) \right]_{S_{12}} \quad (4.48)$$

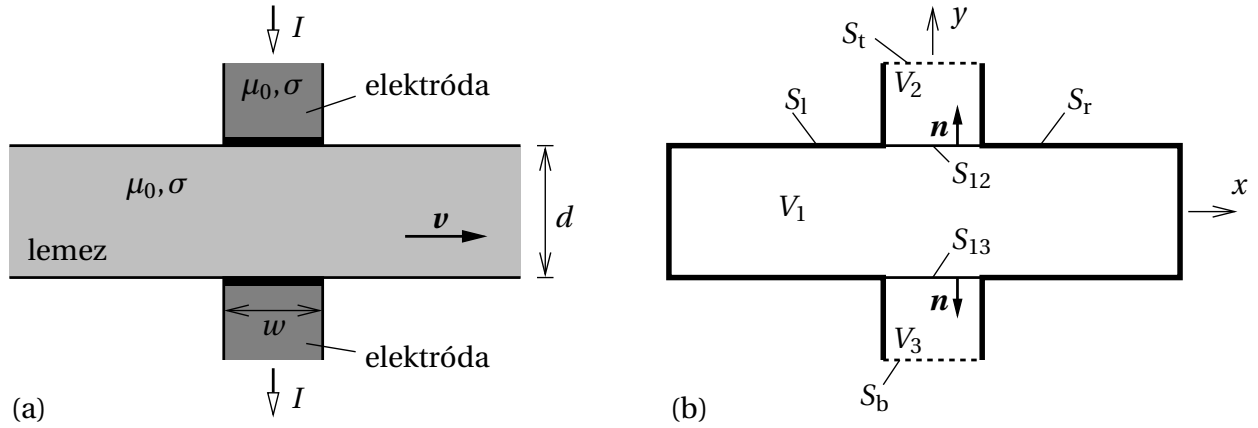
4.4. Tesztfeladatok

Az előző szakaszban ismertetett módszert olyan egyszerű feladatokon keresztül mutatjuk be, amelyek megoldása a szakirodalomból ismert. Az egyes feladatoknál mind a mozgási, mind az ekvivalens nyugalmi modellt analizáltuk véges elem módszerrel. Ennek során mindig azt tapasztaltuk, hogy nem csupán a két modellből kapott számítási eredmények, de az (azonos hálón) diszkrétizált lineáris algebrai egyenletrendszerek is pontosan megegyeztek a két modellel. Ez egyfelől igazolja a modellek ekvivalenciáját, másfelől viszont sajnos numerikus szempontból semmiféle előnyt nem várhatunk a nyugalmi modelltől. Az egyezés miatt az alábbiakban csak a nyugalmi modellel kapott eredményeket ábrázoljuk.

A számításokat a Comsol Multiphysics® véges elem-szoftverrel [26] végeztük. Azon belül a „Coefficient Form PDE Interface” modult választottuk, amellyel a parciális differenciálegyenletek széles – a (4.26)-(4.27) egyenleteket is magába foglaló – köre megoldható, továbbá a (4.40) típusú „Flux/Source” határfeltételek is közvetlenül előírhatók.

4.4.1. Csúszó érintkezők

Elsőként a csúszó érintkezők egy végtelen leegyszerűsített modelljét vizsgáljuk ([111], p.137). Nagy kiterjedésű, nem mágneses fémlemez két oldalán, egymással szemben két, a lemezhez képest mozgó érintkező van, amelyeken keresztül I egyenáramot vezetünk. Az érintkezést ideálisnak tételezzük fel. Célunk a lemezbeli, sebességfüggő áramkép meghatározása. A feladatot 2D közelítésben oldjuk meg. Az elrendezés a 4.2/a.ábrán látható.



4.2. ábra. Csúszó érintkezők: (a) a vizsgált elrendezés vázlata; (b) a peremérték-probléma modelltartományán használt jelölések.

A mozgási modell

A feladatot az érintkezők nyugalmi rendszerében célszerű vizsgálni, mivel abban mind a mozgás, mind a mezők stacionáriusak. Kikötjük, hogy $v < v_r = (\mu_0 \sigma d)^{-1}$, ahol v_r az ún. mágneses Reynolds-szám [111], továbbá hogy nincs tértöltés. A redukált alapegyenletek:⁷

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.51)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.53)$$

Vegyük a (4.53) konstitúciós egyenlet rotációját, majd helyettesítsük be rendre a (4.49), (4.50) és (4.52) egyenleteket, továbbá használjuk ki, hogy σ tartományonként állandó:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mu_0 \sigma \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (4.54)$$

Síkprobléma-közelítéssel élünk, amelyben $\partial/\partial z = 0$. További modellfeltevésünk, hogy z irányban áram nem folyik, azaz $\mathbf{J} = (J_x, J_y, 0)$. A (4.49) és a (4.51) egyenletek alapján belátható, hogy ez esetben a mágneses térerősség tisztán z irányú, azaz $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$. A feladat tehát egyetlen skalár ismeretlen, H_z meghatározására redukálható, amellyel az összes többi térkomponens kifejezhető. A (4.54) PDE redukált alakja, valamint az áramsűrűség kifejezése (immár kétkomponensű vektorokkal):

$$\boxed{\nabla(-\sigma^{-1} \nabla H_z) + \mu_0 \mathbf{v} \cdot \nabla H_z = 0} \quad \mathbf{J} = (\partial_y H_z, -\partial_x H_z). \quad (4.55)$$

⁷ Itt egyelőre három komponensű vektorokkal dolgozunk.

Összevetve a (4.26) PDE sablonnal, az abban szereplő generikus mennyiségek megfeleltetése:
 $u \equiv H_z$, $c = \sigma^{-1}$, $b = \mu_0$, $a = 0$, $f = 0$.

A modelltartomány a 4.2/b. ábrán látható. Az S_l és S_r peremeken áram nem lép ki (vagy mert fém levegő határról van szó, vagy mert a kontaktusoktól „elegendően” távol vagyunk), amely a H_z -re vonatkozó *konstans* Dirichlet-feltétellel írható elő. Az S_t és S_b peremeken ugyanakkor merőleges és homogén be-, ill. kifolyó áramot feltételezünk, amely H_z megfelelően skálázott *lineáris* változásával írható elő. A peremfeltételek rendszere:

$$H_z = x \frac{I}{w}, \quad S_t \text{ és } S_b \quad (4.56)$$

$$H_z = \mp \frac{I}{2w}, \quad S_l \text{ ill. } S_r \quad (4.57)$$

Végül könnyen belátható, hogy az S_{12} és S_{13} közeghatárokon a (4.31)-(4.32) folytonossági feltételek, valamint *fizikai* megfelelőik az alábbiak:

$$[\mathbf{n} \times \nabla H_z] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}] = 0 \quad (4.58)$$

$$[\mathbf{n} \cdot (-\sigma^{-1} \nabla H_z)] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

Ezekkel a végeelem módszerben nincs külön tennivaló, mert az előbbi a diszkretizálás módjából következik, az utóbbi pedig természetes feltétel.

Az ekvivalens nyugalmi modell

A konvekciós tag „beolvasztásával”, (4.43) alapján a PDE:

$$\nabla(-M \nabla H_z) = 0, \quad M = \begin{pmatrix} 1/\sigma & \mu_0 y v_x \\ -\mu_0 y v_x & 1/\sigma \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

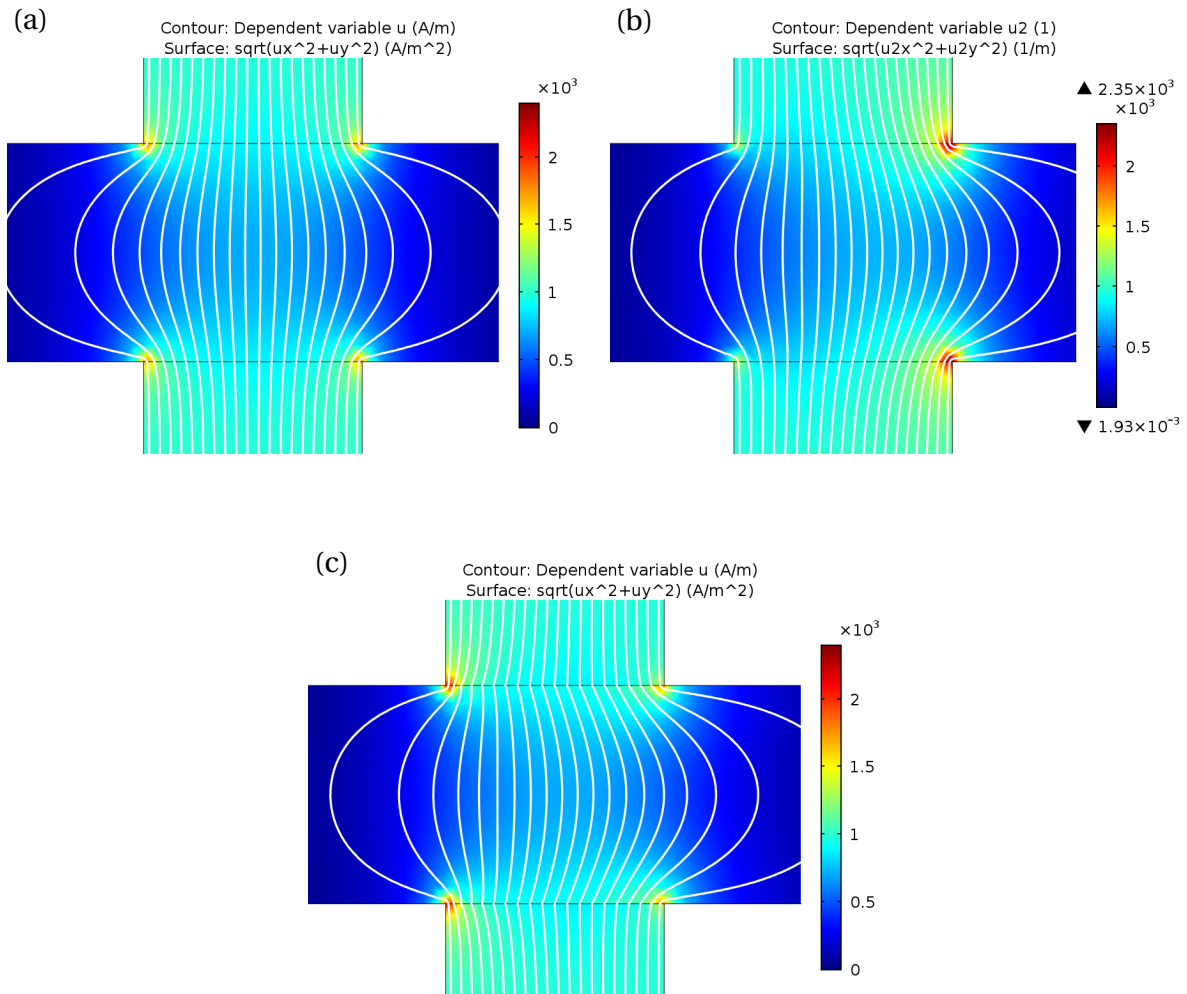
ahol már figyelembe vettük az elrendezés speciális tulajdonságait (vö. 4.2/a. ábra). A peremfeltételek megegyeznek a mozgási modellnél megadottakkal, azonban az S_{12} és S_{13} közeghatárokon explicite elő kell írni a (4.59)-nek megfelelő ugrási feltételt (4.44) alapján:

$$[\mathbf{n} \cdot (-M \nabla H_z)] = f_s^* = -\frac{d}{2} \mu_0 v_x \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.61)$$

ahol figyelembe vettük a normálvektor irányát, valamint hogy $v|_{V_2, V_3} = 0$. Az itt szereplő f_s^* mind a V/m dimenziója, mind a (4.59) feltétel fizikai jelentése alapján z irányú, fiktív felületi *mágneses áramsűrűséget* képvisel.

Eredmények

Példánkban $d = 10$ mm vastag alumíniumlemezt használunk, melynek vezetőképessége $\sigma = 35$ MS/m. Az elektródák $w = 10$ mm szélesek, és ugyancsak alumíniumból vannak. A mágneses

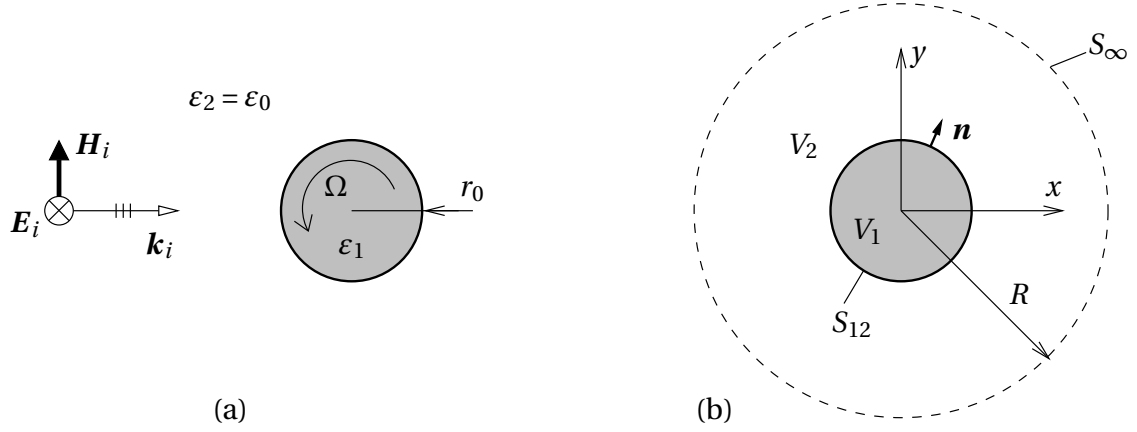


4.3. ábra. Szimulált árameloszlás a csúszó érintkezők környezetében: (a) $v = 0$; (b) $v_x = 2$ m/s; (c) ugyancsak $v_x = 2$ m/s, de a fiktív felületi forrás nélkül.

Reynolds-szám: $\nu_r = 2,27$. Az átfolyó áram 1 méternyi, z irányú hosszra vonatkoztatott értéke $I = 10$ A. Néhány számítási eredmény a 4.3. ábrán látható áramvonalakkal ($H_z = \text{konst.}$ kontúrvonalak) és az áramsűrűség abszolút értékének eloszlásával (színek) megjelenítve. Az (a) ábrán a $v = 0$ esetet látjuk, szimmetrikus áramképpel. A (b) ábra a $v_x = 2$ m/s sebesség melletti áramképet mutatja, amely jól láthatóan „eltolódik” a sebesség irányába. Megjegyezzük, hogy erre a mozgási és a nyugalmi modell pontosan egyező eredményt ad. Végül a (c) ábrán megmutatjuk, mi történik, ha a (4.61) határfeltételt a nyugalmi modellben nem írjuk elő: az áramvonalak a lemezben ezúttal is eltolódnak, de az érintkező felületeken ellenkező irányba mozdulnak és törést szenvednek, amely fizikailag nem értelmezhető.

4.4.2. Radarszórás forgó szigetelőhengeren

Második példánkban lineárisan polarizált síkhullám esik egy a tengelye körül Ω szögsebességgel forgó, hosszú szigetelőhengerre (4.4/a. ábra). A feladat a reflektált hullámkomponens és a szórési iránykarakterisztika meghatározása a szögsebesség függvényében (vö. [111] 298. old.).



4.4. ábra. Szóródás forgó hengeren: (a) a vizsgált elrendezés vázlata;
(b) a peremérték-probléma modelltartományán használt jelölések.

A mozgási modell parciális differenciálegyenlete

A feladatot a levegőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben, síkprobléma közelítésben oldjuk meg. Lineáris, nem mágneses anyagot ($\mu = \mu_0$), valamint forrásmentességet ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$) feltételezünk. A Maxwell-egyenletek frekvenciatartománybeli, redukált alakja a következő [98]:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} \quad (4.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (4.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4.65)$$

amelyben a mezők komplex amplitúdói szerepelnek, és $\omega = 2\pi\nu$ a körfrekvencia. Belátható, hogy (4.64) és (4.65) rendre (4.62) és (4.63) következménye. A feladat szempontjából releváns (4.14) és (4.15) konstitúciós egyenleteket az alábbi, átrendezett alakban használjuk:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} + \eta \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (4.67)$$

ahol ε_r a közeg relatív permittivitása, és $\eta = (\varepsilon_r - 1)/c_0^2$. Ezeket a (4.62) és (4.63) egyenletekbe helyettesítve \mathbf{D} és \mathbf{B} kiküszöbölhető:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega(\varepsilon \mathbf{E} + \eta \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad (4.68)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega(\mu_0 \mathbf{H} + \eta \mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad (4.69)$$

továbbá a (4.69) egyenletből \mathbf{H} kifejezhető:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (4.70)$$

Ezt visszahelyettesítve a (4.68) egyenletbe, és figyelembe véve a közegjellemzők tartományonként homogén voltát, a vektoriális Helmholtz-egyenlet egy speciális alakját kapjuk \mathbf{E} -re:

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + j\omega\eta\{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E})\} + \omega^2\{\mu_0\epsilon\mathbf{E} + \eta^2\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})\} = \mathbf{0}. \quad (4.71)$$

Használjuk ki a szimmetriákat. A henger tengelye maga a z tengely; a hullámteret az x - y síkban vizsgáljuk; a beeső síkhullám erre nézve TE polarizációjú (4.4. ábra). A (4.71) PDE alapján, a $\partial/\partial z = 0$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ feltételek mellett belátható, hogy a teljes hullámter is ugyanilyen tulajdonságú, azaz leírható az

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z), \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, 0) \quad (4.72)$$

vektorkomponensekkel. Mivel \mathbf{H} az \mathbf{E} -vel (4.70)-ből kifejezhető, ezért az egyetlen ismeretlenünk E_z marad. A (4.71) z komponensére vonatkozó skalár PDE a következő:

$$\nabla \cdot (\nabla E_z) - 2j\omega\eta\mathbf{v} \cdot \nabla E_z + \omega^2(\mu_0\epsilon - \eta^2 v^2) E_z = 0. \quad (4.73)$$

A $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ szabadtéri hullámszám és a $\chi = \epsilon_r - 1$ elektromos szuszceptibilitás bevezetésével a PDE együtthatói átalakíthatók:

$$-2j\omega\eta\mathbf{v} = -2j\omega\frac{\epsilon_r - 1}{c_0^2}\mathbf{v} = -2j\frac{\omega}{c_0}\chi\frac{\mathbf{v}}{c_0} = -2jk_0\chi\frac{\mathbf{v}}{c_0}, \quad (4.74)$$

$$\omega^2(\mu_0\epsilon - \eta^2 v^2) = \dots = k_0^2\left(\epsilon_r - \chi^2\frac{v^2}{c_0^2}\right) \approx k_0^2\epsilon_r. \quad (4.75)$$

Az utóbbinál – a (4.66)-(4.67) Minkowski-egyenletekkel konzisztens módon – elhanyagoltuk a v^2/c_0^2 rendű tagot. Ezzel a (4.73) PDE új alakja:

$$\nabla \cdot (\nabla E_z) - 2jk_0\chi\frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_z + k_0^2\epsilon_r E_z = 0. \quad (4.76)$$

A beeső síkhullám mint gerjesztés

Bontsuk fel a teljes hullámteret

$$E_z(x, y) = E_i(x, y) + E_s(x, y) \quad (4.77)$$

alakban, amelyben E_i a beeső (*incident*), E_s pedig a reflektált avagy szórt (*scattered*) komponens. A beeső komponens lényegében a gerjesztő síkhullám, amelyet ismertnek tekintünk, és amely egyszersmind a henger hiányában létrejövő hullámteret képviseli. Ez utóbbi miatt a teljes modelltartományon

$$\nabla \cdot (\nabla E_i) + k_0^2 E_i = 0 \quad (4.78)$$

teljesül. A (4.77) felbontást a (4.76)-ba helyettesítve és rendezve előáll a mozgási modell parciális differenciálegyenlete:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla(E_i + E_s)) - 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla(E_i + E_s) + k_0^2(1 + \chi)(E_i + E_s) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla E_s) - 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_s + k_0^2(1 + \chi)E_s + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla E_i) + k_0^2 E_i}_0 - 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_i + k_0^2\chi E_i &= 0 \\ \boxed{\nabla \cdot (\nabla E_s) - 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_s + k_0^2(1 + \chi)E_s = 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_i - k_0^2\chi E_i} & \quad (4.79) \end{aligned}$$

A (4.26) PDE sablonban szereplő generikus mennyiségekkel való megfeleltetések:

$$u \equiv E_s, \quad c = -1, \quad b = -2jk_0\chi/c_0, \quad a = k_0^2(1 + \chi), \quad f = 2jk_0\chi \frac{\mathbf{v}}{c_0} \cdot \nabla E_i - k_0^2\chi E_i. \quad (4.80)$$

Az általános tárgyalást nem csorbítja, ha a beeső síkhullámot x irányúnak tételezzük fel, azaz $E_i(x, y) = E_0 \exp(-jk_0x)$. Ekkor a gerjesztés formulája $\mathbf{v} = (-\Omega y, \Omega x)$ figyelembevételével:

$$f = 2jk_0\chi \frac{v_x}{c_0} (-jk_0) E_0 e^{-jk_0x} - k_0^2\chi E_0 e^{-jk_0x} = -k_0^2\chi E_0 \left(2\frac{y\Omega}{c_0} + 1 \right) e^{-jk_0x}. \quad (4.81)$$

Folytonossági és peremfeltételek

A modelltartomány a 4.4/b. ábrán látható. Az S_{12} határfelületen az E_i beeső síkhullámkomponens kielégíti a folytonossági feltételeket, ezért csak az E_s szórt komponenst vizsgáljuk. A C^0 konform végeselemháló eleve biztosítja E_s folytonosságát, azaz a (4.17) feltételt. A (4.70) összefüggés segítségével továbbá levezethető, hogy a (4.31)-(4.32) határfeltételek, illetve azok *fizikai* megfelelői az alábbiak:

$$[\mathbf{n} \times \nabla E_s] = 0 \quad \implies \quad [\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_s] = 0 \quad (4.82)$$

$$[\mathbf{n} \cdot (-\nabla E_s)] = 0 \quad \text{és} \quad [\mu] = 0 \quad \implies \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s] = 0 \quad (4.83)$$

A szórt térkomponens amplitúdója a szóró objektum távolterében aszimptotikusan csökken. Ennek jellegét a Sommerfeld-féle sugárzási feltétel adja meg, melynek kétdimenziós problémára érvényes alakja (lásd pl. [98]):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial E_s}{\partial r} + jk_0 E_s \right) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.84)$$

A modelltartományt mesterségesen lezárjuk az S_∞ „távoli” peremmel, amely célszerűen egy origó középpontú, $R \gg r_0$ sugarú körvonal (4.4/b. ábra). Ezen a (4.84) sugárzási feltétel közelíthető egy ún. Robin-peremfeltétellel:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla E_s + \left(jk_0 + \frac{1}{2R} \right) E_s = 0. \quad (4.85)$$

Az ekvivalens nyugalmi modell

A konvekciós tag „beolvasztásával”, (4.47) alapján a PDE:

$$\nabla(-M\nabla E_s) + k_0^2(1+\chi)E_s = f, \quad M = \begin{pmatrix} -1 & jk_0\chi\Omega r^2/c_0 \\ -jk_0\chi\Omega r^2/c_0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

A peremfeltétel megegyezik a (4.85)-tel, azonban az S_{12} közeghatáron explicite elő kell írni a (4.83)-nak megfelelő ugrási feltételt (4.48) szerint:

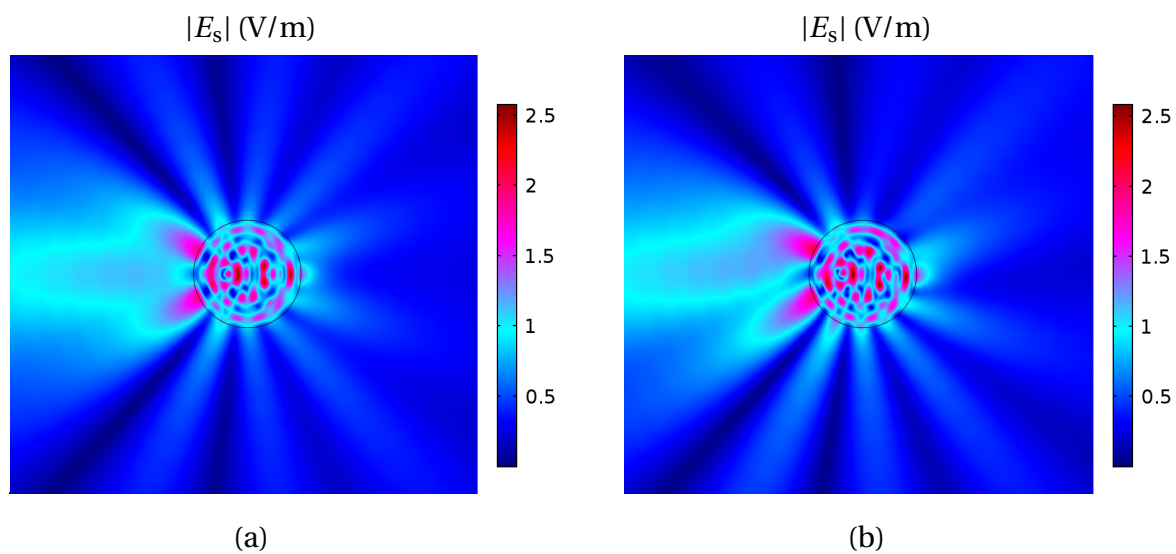
$$[\mathbf{n} \cdot (-M\nabla E_s)] = f_s^* = j \frac{k_0\chi\Omega r_0^2}{c_0} (\mathbf{n} \times \nabla E_s) \quad (4.87)$$

Bár a megadott f_s^* forrás dimenziója V/m^2 , de a (4.83) feltétel fizikai jelentésével összhangban, $(\omega\mu_0)^{-1}$ -nel skálázva fiktív felületi *elektromos áramsűrűséget* ad, amely z irányú. A képletben figyelembe vettük a normálvektor irányát (vö. 4.4/b. ábra), valamint hogy $\chi|_{V_2} = 0$ és $r = r_0$.

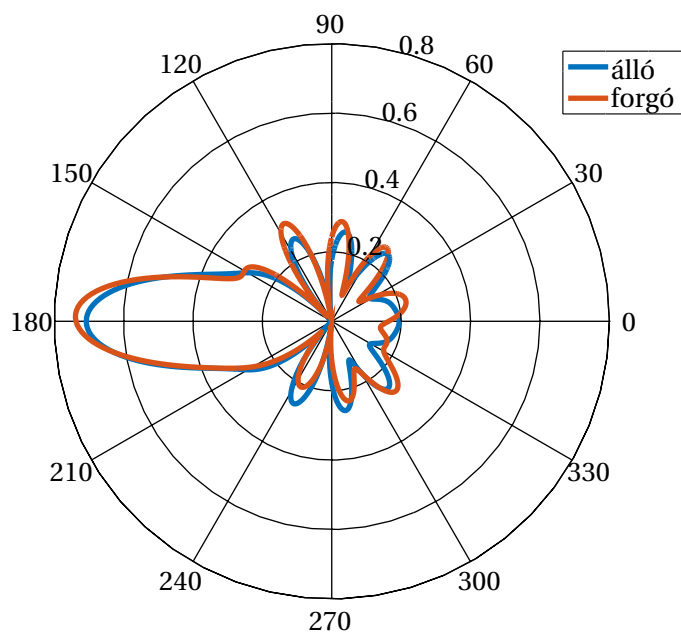
Eredmények

Példánkban $r_0 = 30$ cm sugarú, $\varepsilon_r = 10$ dielektromos állandójú szigetelőhengert vizsgálunk. A megvilágító síkhullám amplitúdója $E_0 = 1$ V/m, frekvenciája $\nu = 1$ GHz; ezen a frekvencián a hullámhossz a levegőben $\lambda_0 = 30$ cm, míg a dielektrikumban $\lambda \approx 9,5$ cm. A modelltartomány mesterséges lezárása $R = 3$ m sugáron történik. A hengert (gondolatban) $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ rad/s szögsebességgel forgatjuk. Talán meglepő a magas érték, ám ez alatt alig kimutatható az effektus. Mindazonáltal a legnagyobb kerületi sebesség még így is csupán néhány ezreléke a fénysebességnek.

A 4.5. ábrán a szórt térkomponens amplitúdóeloszlása látható az álló, illetve a forgó henger környezetében. A 4.6. ábrán pedig a távotérben ($r = R$ sugáron) számolt szórási iránykarakteristikákat hasonlítjuk össze. A forgás okozta aszimmetria mindkét ábrán feltűnő.



4.5. ábra. A szórt hullámkomponens amplitúdója a henger környezetében: (a) $\Omega = 0$ rad/s, (b) $\Omega = 2\pi \cdot 10^6$ rad/s.



4.6. ábra. A távoltéri szórési iránykarakterisztika összehasonlítása álló és forgó hengerre.

Az eredmények tézisszerű összefoglalása

1. Különböző léptékű és közelítésű elektrodinamikai modellek újfajta, hierarchikus összekapcsolásán alapuló, numerikus módszert fejlesztettem ki, amellyel hatékonyan számítható az összetett struktúrájú (pl. litze) huzalok örvényáram-vesztesége. A módszer nem csak pontosabb, mint az eddigiek, de jobban megvilágítja a veszteség mechanizmusát, ezzel elősegíti kisebb veszteségű huzalok tervezését.
 - a) Ezen belül legfontosabb eredményemnek a *kötegekőzi áramkiszorítás* újfajta, nem-lokális kontinuummodelljét tekintem, amely a huzal geometriáját kihasználó, statisztikai alapú homogenizáláson alapul. A modellel megmagyarázható az említett részjelenség egyedi karakterisztikája és aszimptotikus viselkedése, amely egyúttal rámutat a korábbi homogenizált modellek elégtelenségére.
 - b) Kidolgoztam a huzalveszteség összetevőkre bontásának új elméletét, amelyben a keresztmetszeti áramképet teljesítményortogonális *módusok* összegeként írom le. Ehhez az elmélet egyes, már létező elemeit kiegészítettem, illetve tágabb rendszerbe foglaltam; az áramtagokat matematikai formába öntöttem és bizonyítottam ortogonalitásukat.
 - c) A kidolgozott többlépcsős, numerikus számítási eljárás kerete a végelelem módszer (FEM). Az eljárás viszonylag kis erőforrásigényű, hatékony, és könnyen adaptálható a különböző huzalstruktúrákhoz. Alkalmazhatóságát egy litze-tekerceset tartalmazó, vezeték nélküli energiaátviteli rendszer szimulációján demonstráltam; az elmélet és a számítás helyességét mérések igazolják.
2. Vékony szalagból vagy fóliából készült áramvezető tekercsek háromdimenziós végelelemes számításához olyan homogenizált modellt dolgoztam ki, amellyel kiváltható azok – rendkívül erőforrásigényes – menetszintű diszkretizálása. Fő alkalmazásként a magas hőmérsékletű szupravezetőből (HTS) készült, hengeres spirálszalag-tekercsek elektromágneses modellezését tartottam szem előtt. Mindazonáltal a modell könnyen adaptálható más geometriára, alkalmazható többek között fóliatranszformátorok vagy akkumulátorcellák modellezésére, valamint kiterjeszthető a hőtani szimulációra.
 - a) Modellem újdonságát egy olyan helyfüggő, ekvivalens, anizotrop vezetőképességtenzor adja, amelynek főirányai lokálisan a *spirális* szalagra illeszkednek. A szakiro-

dalomban található, hasonló célú, homogenizált vezetőképesség-tenzorok ugyanis mind az idealizált – végtelen menetsűrűsége vonatkozó – hengeres irányt követik.

- b) Az általam kidolgozott modellben virtuálisan megjelenik a szalag két végpontja, amelyekre a kapocsfeszültség egyszerűen értelmezhető. Mivel az utóbbi által indított áramot az anizotrop vezetőképesség automatikusan a megfelelő spirális pályára tereli, ezért *feszültségkényszer* is alkalmazható. Ezzel szemben a korábbi homogenizált szalagtekercs-modellek lényegében olyan kötegelt vezetőknek felelnek meg, amelyben a szalagok egymástól független, zárt hurkokat alkotnak; emiatt számításukra jobbra csak áramkényszer alkalmazható, és a kapocsfeszültség utólagos számítása is körülményes.
 - c) A peremérték-feladatot az $(A-V,A)$ formalizmussal fogalmaztam meg, a Coulomb-mérték előírásával; diszkretizálásra csomóponti változójú végelemeket használtam. E ritkán használt kombinációnak több előnye van az adott feladat szempontjából. Például a tekercs kapocsfeszültsége egyszerűen előírható, ami általában jobban kondicionált együtthatómátrixot eredményez, mint az áramra vonatkozó integrális kényszerfeltételek. A kis elemszám és a mérték előírása pedig lehetővé teszi direkt megoldó használatát.
 - d) Többféle lineáris tesztfeladaton keresztül megvizsgáltam a módszer konvergenciáját, pontosságát és korlátait. Ezt követően sikerrel szimuláltam nemlineáris HTS szalagtekercsek bekapcsolási tranziensét és kritikus állapotát.
3. Új eljárást fejlesztettem ki, amellyel a stacionárius közegmozgás elektromágneses modellje egy nyugvó közeg ekvivalens modelljévé alakítható. Ennek során a mozgó közeg *konvekciós-diffúziós* típusú parciális differenciálegyenletét (PDE) formálisan tisztán *diffúzióssá* alakítom át, amelyhez nem szükséges az ekvivalencia alapjául szolgáló bi-anizotrop közeg karakterisztikájának meghatározása.
- a) A javasolt eljárással olyan FEM szoftverekben is lehetővé válik a stacionárius közegmozgás modellezése, amelyekben ez a funkció nincs beépítve, anélkül hogy a szoftver alacsonyabb hozzáférési szintjén kellene azt implementálni. Tény, hogy a PDE diffúziós tagja ilyenkor általában inhomogén tenzoregyütthatót kap, ám ennek kezelésére számos végelemekód eleve alkalmas.
 - b) Megmutattam, hogy a végelem-modellben a mozgó tartományt helyettesítő bi-anizotrop közeg határán fel kell venni egy *fiktív felületi forrást* az ekvivalencia biztosítására. Ez a gyenge alakban felírt egyenletek és a közeghatáron érvényes folytonossági feltételek együttes következménye. A szakirodalom ezzel az implementációs problémával nem foglalkozik, mert az ekvivalencia elméleti vizsgálatában hallgatólagosan állandó vagy folytonosan változó közegjellemzőre szorítkozik.
 - c) Az eljárást két eltérő jellegű tesztfeladat megoldásán mutattam be; eredményeim helyességét szakirodalmi adatok támasztják alá.

Felhasznált irodalom

- [1] H. Acikgoz, L. Santandrea, Y. Le Bihan, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, O. Meyer, and L. Pichon. „Generation and use of optimised databases in microwave characterisation”. In: *Science, Measurement & Technology, IET* 2 (Dec. 2008), pp. 467–473.
- [2] M. D. Ainslie, D. Hu, V. M. R. Zermeno, and F. Grilli. „Numerical simulation of the performance of high-temperature superconducting coils”. In: *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism* 30 (Oct. 2016), pp. 1987–1992.
- [3] Zs. Badics, S. Bilicz, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „Finite-element-integral equation full-wave multisolver for efficient modeling of resonant wireless power transfer”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 52.3 (Mar. 2016), pp. 1–4.
- [4] Zs. Badics, S. Bilicz, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „Nonlocal impedance boundary conditions in modeling WPT coils for all frequencies”. In: *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 59.1 (2019), pp. 9–18.
- [5] Zs. Badics, J. Pávó, S. Bilicz, and Sz. Gyimóthy. „Subdomain perturbation finite-element method for quasi-static Darwin approximation”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 56.1 (Jan. 2020), pp. 1–4.
- [6] E. Berrospe-Juarez, V. M. R. Zermeno, F. Trillaud, and F. Grilli. „Real-time simulation of large-scale HTS systems: multi-scale and homogeneous models using the T–A formulation”. In: *Superconductor Science and Technology* 32.6 (Apr. 2019), p. 065003.
- [7] M. V. Berry. „Index formulae for singular lines of polarization”. In: *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 6.7 (2004), pp. 675–678.
- [8] S. Bilicz, Zs. Badics, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „A full-wave integral equation method including accurate wide-frequency-band wire models for WPT coils”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 54.3 (Mar. 2018), pp. 1–4.
- [9] S. Bilicz, Zs. Badics, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „Modeling of dense windings for resonant wireless power transfer by an integral equation formulation”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 53.6 (June 2017), pp. 1–4.
- [10] S. Bilicz, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, P. Horváth, and K. Marák. „Uncertainty quantification of wireless power transfer systems”. In: *IEEE Wireless Power Transfer Conference (WPTC)*. Aveiro, Portugal, May 2016, pp. 1–3.
- [11] S. Bilicz, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, L. L. Tóth, Zs. Badics, and B. Bálint. „Modeling of resonant wireless power transfer with integral formulations in heterogeneous media”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 52.3 (Mar. 2016), pp. 1–4.
- [12] S. Bilicz, E. Vazquez, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, and M. Lambert. „Kriging for eddy-current testing problems”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 46.8 (Aug. 2010), pp. 3165–3168.

- [13] S. Bilicz, E. Vazquez, M. Lambert, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „Characterization of a 3D defect using the expected improvement algorithm”. In: *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 28.4 (2009), pp. 851–864.
- [14] S. Bilicz. „Approximate and proper electromagnetic modelling in moving conductors”. In: *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science* 59.2 (2015), pp. 43–47.
- [15] S. Bilicz, J. Pávó, Sz. Gyimóthy, and Zs. Badics. „An integral equation formulation with global series expansion for resonant wireless power transfer”. In: *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 36.5 (2017), pp. 1474–1487.
- [16] A. Bingler, S. Bilicz, Zs. Badics, Sz. Gyimóthy, and J. Pávó. „Integral equation formulations for modeling wireless power transfer systems in close proximity to foreign objects”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 55.6 (June 2019), pp. 1–4.
- [17] J. Bird and T. A. Lipo. „A 3-D magnetic charge finite-element model of an electrodynamic wheel”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44.2 (2008), pp. 253–265.
- [18] O. Biro, K. Preis, and K. R. Richter. „On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 32.3 (May 1996), pp. 651–654.
- [19] O. Bíró and K. R. Richter. „CAD in electromagnetism”. In: *Advances in Electronics and Electron Physics* 82 (Dec. 1991), pp. 1–96.
- [20] A. Bodrov and S.-K. Sul. „Analysis of wireless power transfer by coupled mode theory (CMT) and practical considerations to increase power transfer efficiency”. In: *Wireless Power Transfer – Principles and Engineering Explorations*. Ed. by K. Y. Kim. InTech, 2012, pp. 19–50.
- [21] A. Bossavit. *Computational Electromagnetism*. Academic Press, 1997.
- [22] G. Cerri, S. A. Kovryalov, and V. M. Primiani. „Modelling of a litz-wire planar winding”. In: *IET Science, Measurement Technology* 4.4 (July 2010), pp. 214–219.
- [23] W. K. Chan, P. Masson, C. Luongo, and J. Schwartz. „The 3D mixed-dimensional quench model of a high aspect ratio high temperature superconducting coated conductor tape”. In: *Proceedings of the COMSOL Conference*. Boston, MA, USA, 2010.
- [24] X. Cheng, H. Chen, B. I. Wu, and J. A. Kong. „Cloak for bianisotropic and moving media”. In: *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 89 (2009), pp. 199–212.
- [25] *COMSOL AD/DC Module User’s Guide*. v5.2. Comsol Ab, 2015.
- [26] *COMSOL Multiphysics Reference Manual*. v5.2. Comsol Ab, 2015.
- [27] CST - Computer Simulation Technology. *Inductive Wireless Charging for Automotive Applications*. 2017. URL: <https://www.cst.com/events/webinars/wireless-2017> (visited on 04/03/2019).
- [28] L. C. Davis and D. F. Wilkie. „Analysis of motion of magnetic levitation systems: implications for high-speed vehicles”. In: *Journal of Applied Physics* 42.12 (1971), pp. 4779–4793.
- [29] H. De Gersem and K. Hameyer. „A finite element model for foil winding simulation”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 37.5 (Sept. 2001), pp. 3427–3432.

- [30] Q. Deng, J. Liu, D. Czarkowski, M. K. Kazimierczuk, M. Bojarski, H. Zhou, and W. Hu. „Frequency-dependent resistance of litz-wire square solenoid coils and quality factor optimization for wireless power transfer”. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63.5 (May 2016), pp. 2825–2837.
- [31] P. Dular and C. Geuzaine. „Spatially dependent global quantities associated with 2-D and 3-D magnetic vector potential formulations for foil winding modeling”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (Mar. 2002), pp. 633–636.
- [32] P. Dular, J. Gyselinck, T. Zeidan, and L. Krähenbühl. „Finite element modelling of stacked thin regions with non-zero global currents”. In: *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 23 (Sept. 2004), pp. 707–714.
- [33] M. El Feddi, Z. Ren, A. Razek, and A. Bossavit. „Homogenization technique for Maxwell equations in periodic structures”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 33.2 (Mar. 1997), pp. 1382–1385.
- [34] M. Erdogan, S. Tunc, S. Yildiz, and F. Inanir. „A comparative study of AC transport and eddy current losses for coil made of HTS tapes coated with copper stabilizer”. In: *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism* 30.11 (2017), pp. 3277–3283.
- [35] D. Erricolo, P.-Y. Chen, A. Rozhkova, E. Torabi, H. Bagci, A. Shamim, and X. Zhang. „Machine learning in electromagnetics: a review and some perspectives for future research”. In: *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Granada, Spain, Sept. 2019, pp. 1377–1380.
- [36] G. Escamez, C. Lorin, T. Wu, and P. J. Masson. „Quench propagation in YBCO racetrack of a rotor winding”. In: *Proceedings of the COMSOL Conference*. Boston, MA, USA, 2013.
- [37] J. A. Ferreira. „Analytical computation of AC resistance of round and rectangular litz wire windings”. In: *IEE Proceedings B - Electric Power Applications* 139.1 (Jan. 1992), pp. 21–25.
- [38] J. A. Ferreira. „Improved analytical modeling of conductive losses in magnetic components”. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 9.1 (Jan. 1994), pp. 127–131.
- [39] J. A. Ferreira. „Electromagnetic modelling of power electronic converters under conditions of appreciable skin and proximity effects”. PhD. University of Johannesburg, 1987.
- [40] Sz. Gyimóthy. „Emulation of stationary moving medium by magneto-electric material in the finite element method”. In: *20th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG*. Montreal, Canada, 28 June - 2 July 2015, pp. 213–214.
- [41] Sz. Gyimóthy. „Modeling stationary moving medium by static magneto-electric material”. In: *European Physical Journal, Applied Physics* 85.1 (2019), p. 10901.
- [42] Sz. Gyimóthy. „Nagy erőforrásigényű elektrodinamikai szimulációs és inverziós feladatok hatékony megoldása”. Habilitáció. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamosmérnöki és Informatikai Kar, 2014.
- [43] Sz. Gyimóthy. „Optimal sampling for fast eddy current testing inversion by utilising sensitivity data”. In: *IET Science, Measurement & Technology* 9.3 (2015), pp. 235–240.
- [44] Sz. Gyimóthy. *Vezeték nélküli energiaátvitel*. Energetikai Szakkollégium. 2017. URL: <https://www.eszk.org/rendezvenyeink/archivum/archivum-2017/vezetek-nelkuli-energiaatvitel> (visited on 12/28/2019).

- [45] Sz. Gyimóthy, Zs. Badics, J. Pávó, and A. Vaskó. „Inspection of the delamination of magnetic and non-magnetic conducting layers using NDT”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 48.2 (Feb. 2012), pp. 499–502.
- [46] Sz. Gyimóthy, S. Bilicz, B. Bálint, J. Pávó, and P. Horváth. „Visualization of steady-state power flow in resonant WPT systems”. In: *17th International IGTE Symposium*. Graz, Austria, 18-21 Sep 2016, pp. 163–167.
- [47] Sz. Gyimóthy, S. Kaya, D. Obara, M. Shimada, M. Masuda, S. Bilicz, J. Pávó, and G. Varga. „Loss computation method for litz cables with emphasis on bundle-level skin effect”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 5.6 (2019), pp. 1–4.
- [48] Sz. Gyimóthy and A. Kenderes. „Homogenized FEM model for pancake coils spiral-wound from a coated tape”. In: *18th International IGTE Symposium*. Graz, Austria, 16-19 Sep 2018.
- [49] Sz. Gyimóthy, A. Kenderes, S. Bilicz, J. Pávó, and Zs. Badics. „Homogenized 3-D FEM model for simulation of HTS coils”. In: *22nd International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG*. Paris, France, 15-19 July 2019, pp. 1–4.
- [50] Sz. Gyimóthy, Y. Le Bihan, and J. Pávó. „Optimized database for training neural networks used in non-destructive testing”. In: *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 25.1-4 (2007), pp. 717–721.
- [51] Sz. Gyimóthy, J. Pávó, and H. Tsuboi. „Conceptual evaluation of inversion models used for layered structures”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4 (Apr. 2006), pp. 1091–1094.
- [52] Sz. Gyimóthy, J. Pávó, P. Kis, T. Toratani, R. Katsumi, and G. Varga. „Simulation of the absorbing clamp method for optimizing the shielding of power cables”. In: *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 32.5 (Sept. 2013), pp. 1567–1580.
- [53] J. Gyselinck and P. Dular. „Frequency-domain homogenization of bundles of wires in 2-D magnetodynamic FE calculations”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 41.5 (May 2005), pp. 1416–1419.
- [54] E. Härö and A. Stenvall. „Reducing modeling domain to speed-up quench simulations of HTS coils”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 24.3 (2014), pp. 1–5.
- [55] H. A. Haus and J. R. Melcher. *Electromagnetic Fields and Energy*. Prentice Hall, 1989.
- [56] F. Henrotte, H. Heumann, E. Lange, and K. Hameyer. „Upwind 3-D vector potential formulation for electromagnetic braking simulations”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 46.8 (2010), pp. 2835–2838.
- [57] H. Heumann and S. Kurz. „Modeling and finite-element simulation of the Wilson&Wilson experiment”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), pp. 65–68.
- [58] S. Hiruma, Y. Otomo, and H. Igarashi. „Eddy current analysis of litz wire using homogenization-based FEM in conjunction with integral equation”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 54.3 (Mar. 2018), pp. 1–4.
- [59] P. Hráskó. *Relativitáselmélet*. Typotex Kiadó, 2002.
- [60] H. Igarashi. „Semi-analytical approach for finite-element analysis of multi-turn coil considering skin and proximity effects”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 53.1 (Jan. 2017), pp. 1–7.

- [61] T. Ivezić. „The constitutive relations and the magnetoelectric effect for moving media”. In: *International Journal of Modern Physics B* 26.08 (2012), pp. 1–18.
- [62] J. D. Jackson. *Klasszikus elektrodinamika*. Typotex Kiadó, 2010.
- [63] JFE Ferrite Group. *Ferrite Materials for Power supply – Low Power Loss Material Characteristics*. URL: <http://www.jfe-frt.com/products/pdf/003.pdf> (visited on 08/09/2019).
- [64] J.-M. Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2015.
- [65] J.-M. Jin. *Theory and computation of electromagnetic fields*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2010.
- [66] A. Kenderes. „Szalagtekercs homogenizált térszámítási modellje”. In: XXXIV. Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Műszaki Tudományi Szekció. Budapest, Hungary, 21-23 March 2019, pp. 1–43.
- [67] I. Kiss, Sz. Gyimóthy, Zs. Badics, and J. Pávó. „Parallel realization of the element-by-element fem technique by cuda”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 48.2 (Feb. 2012), pp. 507–510.
- [68] B. Klaus, D. Barth, B. Sillmann, and T. Leibfried. „Design and implementation of a transmission system for high-performance contactless electric vehicle charging”. In: *IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC)*. Chicago, IL, USA, 22-24 June 2017, pp. 39–44.
- [69] D. Klis, S. Burgard, O. Farle, and R. Dyczij-Edlinger. „Fast simulation of wireless power transfer systems with varying coil alignment”. In: *IFAC-PapersOnLine* 48 (Dec. 2015), pp. 248–253.
- [70] M. Kuczmann and A. Iványi. *The finite element method in magnetics*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [71] L. D. Landau and E. M. Lifsic. *Elméleti Fizika VIII. – Folytonos közegek elektrodinamikája*. Typotex Kiadó, 2010.
- [72] A. Massa, D. Marcantonio, X. Chen, M. Li, and M. Salucci. „DNNs as applied to electromagnetics, antennas, and propagation — a review”. In: *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 18.11 (Nov. 2019), pp. 2225–2229.
- [73] P. J. Masson, V. R. Rouault, G. Hoffmann, and C. A. Luongo. „Development of quench propagation models for coated conductors”. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 18.2 (2008), pp. 1321–1324.
- [74] Z. Melhem, ed. *High Temperature Superconductors (HTS) for Energy Applications*. Woodhead Publishing Ltd., 2012.
- [75] P. Mintchev, M. Dimitrov, and S. Balinov. „Comparative analysis of nodal and edge finite element method for numerical analysis of 3-D magnetostatic systems”. In: *3rd Japanese-Bulgarian-Macedonian Joint Seminar on Applied Electromagnetics*. Ohrid, Macedonia, 2002, pp. 17–22.
- [76] O. Moreau, L. Popiel, and J. L. Pages. „Proximity losses computation with a 2D complex permeability modelling”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 34.5 (Sept. 1998), pp. 3616–3619.
- [77] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. Version 1.0.23. National Institute of Standards and Technology. 2019-06-15. URL: <http://dlmf.nist.gov/>.

- [78] F. Ollendorff. „Magnetostatik der massekerne”. In: *Archiv für Elektrotechnik* 25.6 (1931), pp. 436–447.
- [79] C. Panchal, S. Stegen, and J. Lu. „Review of static and dynamic wireless electric vehicle charging system”. In: *Engineering Science and Technology, an International Journal* 21.5 (2018), pp. 922–937.
- [80] J. Pávó, Zs. Badics, S. Bilicz, and Sz. Gyimóthy. „Efficient perturbation method for computing two-port parameter changes due to foreign objects for WPT systems”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 54.3 (Mar. 2018), pp. 1–4.
- [81] J. Pávó, Sz. Gyimóthy, S. Bilicz, L. L. Tóth, P. Kis, and G. Varga. „Field computational aspects of wireless power transfer”. In: *16th International IGTE Symposium*. Graz, Austria, 14-17 Sep 2014, pp. 239–244.
- [82] J. Pávó and Sz. Gyimóthy. „Adaptive inversion database for electromagnetic nondestructive evaluation”. In: *NDT & E International* 40 (Apr. 2007), pp. 192–202.
- [83] J. Pávó, I. Sebestyén, Sz. Gyimóthy, and O. Bíró. „Approximate prediction of losses in transformer plates”. In: *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 22.3 (2003), pp. 689–702.
- [84] F. Pichler, N. Koester, and A. Thaler. „Thermo-electric simulation of battery-modules with reduced order modelling of linear electrical components”. In: *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 36.5 (2017), pp. 1488–1500.
- [85] A. D. Podoltsev, I. N. Kucheryavaya, and B. B. Lebedev. „Analysis of effective resistance and eddy-current losses in multiturn winding of high-frequency magnetic components”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 39.1 (Jan. 2003), pp. 539–548.
- [86] D. Rodger, P. J. Leonard, and T. Karaguler. „An optimal formulation for 3D moving conductor eddy current problems with smooth rotors”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 26.5 (1990), pp. 2359–2363.
- [87] A. Roßkopf, E. Bär, and C. Joffe. „Influence of inner skin- and proximity effects on conduction in litz wires”. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 29.10 (Oct. 2014), pp. 5454–5461.
- [88] A. Roßkopf, E. Bär, C. Joffe, and C. Bonse. „Calculation of power losses in litz wire systems by coupling FEM and PEEC method”. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 31.9 (Sept. 2016), pp. 6442–6449.
- [89] A. Roßkopf, C. Joffe, and E. Bär. „Calculation of ohmic losses in litz wires by coupling analytical and numerical methods”. In: *4th International Electric Drives Production Conference (EDPC)*. Nürnberg, Germany, 30 Sep. - 1 Oct 2014, pp. 1–6.
- [90] A. Roßkopf, S. Schuster, A. Endruschat, and E. Bär. „Influence of varying bundle structures on power electronic systems simulated by a coupled approach of FEM and PEEC”. In: *IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*. Miami, FL, USA, 13-16 Nov 2016, pp. 1–1.
- [91] G. Rousseaux. „Forty years of Galilean electromagnetism (1973–2013)”. In: *The European Physical Journal Plus* 128.8 (Aug. 2013), p. 81.
- [92] SAE International. *J-2954, Wireless Power Transfer for Light-Duty Plug-in/Electric Vehicles and Alignment Methodology*. 2019. URL: https://www.sae.org/standards/content/j2954_201904/ (visited on 08/09/2019).

- [93] F. Sass, D. H. N. Dias, G. G. Sotelo, and R. de Andrade Junior. „Superconducting magnetic bearings with bulks and 2G HTS stacks: comparison between simulations using H and A-V formulations with measurements”. In: *Superconductor Science and Technology* 31.2 (Jan. 2018), p. 025006.
- [94] S. Satapathy and K. Hsieh. „Jump conditions for Maxwell equations and their consequences”. In: *AIP Advances* 3.1 (2013), p. 012120.
- [95] S. Schöps, H. De Gersem, and T. Weiland. „Winding functions in transient magnetoquasistatic field-circuit coupled simulations”. In: *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 32 (Nov. 2013), pp. 2063–2083.
- [96] I. Sebestyén, Sz. Gyimóthy, J. Pávó, and O. Bíró. „Calculation of losses in laminated ferromagnetic materials”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 40.2 (Mar. 2004), pp. 924–927.
- [97] I. Sebestyén, J. Pávó, Sz. Gyimóthy, and O. Bíró. „Modeling of nonlinear material with linear inhomogeneous medium for loss prediction of transformer cores”. In: *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 19.1-4 (2004), pp. 427–431.
- [98] K. Simonyi and L. Zombory. *Elméleti villamosságtan*. Műszaki Könyvkiadó, 2000.
- [99] V. Sokolovsky, V. Meerovich, S. Goren, and G. Jung. „Analytical approach to AC loss calculation in high-Tc superconductors”. In: *Physica C: Superconductivity* 306.1 (1998), pp. 154–162.
- [100] L. Solymár. *Elektromágneses térelmélet és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó, 1980.
- [101] C. R. Sullivan. „Optimal choice for number of strands in a litz-wire transformer winding”. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 14.2 (Mar. 1999), pp. 283–291.
- [102] C. R. Sullivan and R. Y. Zhang. „Analytical model for effects of twisting on litz-wire losses”. In: *IEEE 15th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*. Santander, Spain, 22-25 June 2014, pp. 1–10.
- [103] C. R. Sullivan and R. Y. Zhang. „Simplified design method for litz wire”. In: *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC*. Fort Worth, TX, USA, 16-20 March 2014, pp. 2667–2674.
- [104] SuperPower Inc. *2015 Technology and Manufacturing Innovations at SuperPower*. URL: http://www.superpower-inc.com/system/files/2015_SPI_New_Innovations.pdf (visited on 09/24/2019).
- [105] SuperPower Inc. *2G HTS Coils*. URL: http://www.superpower-inc.com/system/files/SP_Coil+Fact+Sheet_2014_v1.pdf (visited on 08/23/2019).
- [106] C. T. Tai. „Electrodynamics of moving anisotropic media - the first-order theory”. In: *Journal of Research, Radio Science NBS/USNC-URSI* 69D.3 (1965), pp. 401–405.
- [107] Gy. Tevan. *Analytical Skin Effect Models in Electrical Engineering*. Akadémiai Kiadó, 2010.
- [108] L. Tóth. „Vezeték nélküli energiaátviteli rendszer fejlesztése”. MA thesis. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2016.
- [109] S. A. Tretyakov, I. S. Nefedov, and P. Alitalo. „Generalized field-transforming metamaterials”. In: *New Journal of Physics* 10.11 (2008), p. 115028.
- [110] I. Vajda. „Szupravezetők villamosipari alkalmazásai”. In: *Megújuló energiák villamos rendszerei (BMEVIVEM262 jegyzet)*. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Villamos Energetika Tanszék, 2009. URL: https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0048_VIVEM262HU/adatok.html (visited on 08/23/2019).

- [111] J. Van Bladel. *Relativity and engineering*. Springer-Verlag, 1984.
- [112] J. Vehmas, S. Hrabar, and S. Tretyakov. „Transmission lines emulating moving media”. In: *New Journal of Physics* 16.9 (2014), p. 093065.
- [113] G. Vértesy, B. Bálint, A. Bingler, Sz. Gyimóthy, S. Bilicz, and J. Pávó. „Simulation of magnetic flux distribution for the measurement of the local thinning of ferromagnetic plates”. In: *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 55 (Sept. 2017), pp. 1–16.
- [114] S. Wang and D. G. Dorrell. „Copper loss analysis of EV charging coupler”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.11 (Nov. 2015), pp. 1–4.
- [115] Wdwd [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)]. *Demonstration of wireless charge during parking*. In *Tokyo Motor Show 2011*. 2011. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electric_car_wireless_parking_charge.jpg (visited on 08/09/2019).
- [116] Wdwd [CC BY-SA 3.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)]. *Electronics and coil inside of an induction cooker*. 2008. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Induktionskochfeld_Spule.jpg (visited on 02/25/2019).
- [117] H. A. Wheeler. „Simple inductance formulas for radio coils”. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 16.10 (1928), pp. 1398–1400.
- [118] M. Zec, R. P. Uhlig, M. Ziolkowski, and H. Brauer. „Fast technique for Lorentz force calculations in non-destructive testing applications”. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), pp. 133–136.
- [119] V. M. R. Zermeño and F. Grilli. „3D modeling and simulation of 2G HTS stacks and coils”. In: *Superconductor Science and Technology* 27.4 (2014), p. 044025.
- [120] M. Zhang, J.-H. Kim, S. Pamidi, M. Chudy, W. Yuan, and T. A. Coombs. „Study of second generation, high-temperature superconducting coils: determination of critical current”. In: *Journal of Applied Physics* 111.8 (2012), p. 083902.
- [121] M. Zhang, K. Matsuda, and T. A. Coombs. „New application of temperature-dependent modelling of high temperature superconductors: Quench propagation and pulse magnetization”. In: *Journal of Applied Physics* 112.4 (2012), p. 043912.
- [122] R. Y. Zhang, J. K. White, J. G. Kassakian, and C. R. Sullivan. „Realistic litz wire characterization using fast numerical simulations”. In: *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition - APEC*. Fort Worth, TX, USA, 16-20 March 2014, pp. 738–745.